

R1.10: Finance

Arnaud Rousselle

`arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr`

`http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/`

Année universitaire 2024-2025

Semestre 1

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts simples* et au *taux* τ par période si les *intérêts* de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La *valeur acquise* au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à *intérêts simples*, au *taux* τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts simples* et au *taux* τ par période si les *intérêts* de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La *valeur acquise* au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à *intérêts simples*, au *taux* τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

- ❶ Les *intérêts* ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts simples* et au *taux* τ par période si les *intérêts* de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La *valeur acquise* au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à *intérêts simples*, au *taux* τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

- 1 Les *intérêts* ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.
- 2 Dans la pratique, les *intérêts simples* ne sont que *rarement* utilisés. Ils le sont généralement pour des placements à court terme (moins d'un an).

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts simples* et au *taux* τ par période si les *intérêts* de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La *valeur acquise* au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à *intérêts simples*, au *taux* τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

- 1 Les *intérêts* ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.
- 2 Dans la pratique, les *intérêts simples* ne sont que *rarement* utilisés. Ils le sont généralement pour des placements à court terme (moins d'un an).
- 3 Notion sous-jacente : les *suites arithmétiques*.

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Proposition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *arithmétique de raison r et de premier terme u_0* si, et seulement si

$$u_n = u_0 + nr, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Proposition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *arithmétique de raison r et de premier terme u_0* si, et seulement si

$$u_n = u_0 + nr, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Remarque

Une suite arithmétique est *strictement croissante* si $r > 0$, *strictement décroissante* si $r < 0$ et *constante* si $r = 0$.

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite arithmétique

Si l'on connaît deux termes d'une suite arithmétique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison r et son premier terme u_0 , il suffit d'écrire que r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + kr = u_k = a \\ u_0 + nr = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

Si u_0 ou r est connu, il n'y a qu'une seule équation à considérer.

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases} .$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases} .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases} &\iff \begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ 4r = 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_0 = 9 - 3r = 9 - 3 \times 2 = 3 \\ r = 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases} .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases} &\iff \begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ 4r = 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_0 = 9 - 3r = 9 - 3 \times 2 = 3 \\ r = 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 500€ à intérêts simples au taux annuel de 0,75%, les intérêts de chaque période s'élèveront à $I = 3,75€$.

Après 20 années, le capital acquis sera

$$V_{20} = C_0 + 20I = 500 + 20 \times 3,75 = 575€.$$

On aura donc touché $575 - 500 = 75€$ d'intérêts.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 500€ à intérêts simples au taux annuel de 0,75%, les intérêts de chaque période s'élèveront à $I = 3,75€$.

Après 20 années, le capital acquis sera

$$V_{20} = C_0 + 20I = 500 + 20 \times 3,75 = 575€.$$

On aura donc touché $575 - 500 = 75€$ d'intérêts.

Remarque

*V_{20} est appelée **valeur capitalisée** après 20 ans.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

*On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé **valeur actuelle**, pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé *valeur actuelle*, pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.

On a :

$$V_5 = 11500 \iff V_0 + 5I = 11500$$

$$\iff V_0 + 5I = 11500$$

$$\iff C_0 + 5\tau C_0 = 11500$$

$$\iff C_0(1 + 5 \times 0,03) = 11500$$

$$\iff C_0 = \frac{11500}{1,15} = 10000$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé *valeur actuelle*, pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.

On a :

$$\begin{aligned}V_5 = 11500 &\iff V_0 + 5I = 11500 \\ &\iff V_0 + 5I = 11500 \\ &\iff C_0 + 5\tau C_0 = 11500 \\ &\iff C_0(1 + 5 \times 0,03) = 11500 \\ &\iff C_0 = \frac{11500}{1,15} = 10000\end{aligned}$$

La *valeur actuelle* de 11500€ dans 5 ans au taux simple de 3% est de 10000€.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.

*On cherche le **taux mensuel** du placement.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.

On cherche le *taux mensuel* du placement.

La relation $V_n = C_0 + ni$ entraîne que les intérêts de chaque période s'élèvent à

$$I = \frac{1}{n} (V_n - C_0) = \frac{1}{8} (20400 - 20000) = 50\text{€}.$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.

On cherche le *taux mensuel* du placement.

La relation $V_n = C_0 + nt$ entraîne que les intérêts de chaque période s'élèvent à

$$I = \frac{1}{n} (V_n - C_0) = \frac{1}{8} (20400 - 20000) = 50\text{€}.$$

On en déduit que le *taux mensuel* du placement est de $\tau = \frac{I}{C_0} = \frac{50}{20000} = 0,25\%$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons *dans combien d'années au minimum*, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons *dans combien d'années au minimum*, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 1500 &\iff C_0 + nl = C_0 + nC_0\tau \geq 1500 \\ &\iff 1000 + n \times 1000 \times 0,07 \geq 1500 \\ &\iff 70n \geq 500 \\ &\iff n \geq \frac{500}{70} \simeq 7,1. \end{aligned}$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons *dans combien d'années au minimum*, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 1500 &\iff C_0 + nl = C_0 + nC_0\tau \geq 1500 \\ &\iff 1000 + n \times 1000 \times 0,07 \geq 1500 \\ &\iff 70n \geq 500 \\ &\iff n \geq \frac{500}{70} \simeq 7,1. \end{aligned}$$

Il faudra attendre *au moins 8 ans* pour obtenir une valeur acquise ≥ 1500 €.

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts composés* et au *taux* τ par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la *valeur acquise* V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts composés* et au *taux* τ par période si les *intérêts* de la n^{e} période sont calculés à partir de la *valeur acquise* V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

- 1 Les *intérêts* d'une période *portent* ici sur la *valeur acquise* au début de la période.

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts composés* et au *taux* τ par période si les intérêts de la n^{e} période sont calculés à partir de la *valeur acquise* V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

- 1 Les *intérêts* d'une période *portent* ici sur la *valeur acquise* au début de la période.
- 2 Les *placements* à *intérêts composés* sont *les plus fréquents*. Lorsqu'il n'est pas précisé si un placement est rémunéré par des *intérêts simples* ou *composés*, on considère par défaut qu'il s'agit d'*intérêts composés*.

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à *intérêts composés* et au *taux* τ par période si les intérêts de la n^{e} période sont calculés à partir de la *valeur acquise* V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

- 1 Les *intérêts* d'une période *portent* ici sur la *valeur acquise* au début de la période.
- 2 Les *placements* à *intérêts composés* sont *les plus fréquents*. Lorsqu'il n'est pas précisé si un placement est rémunéré par des *intérêts simples* ou *composés*, on considère par défaut qu'il s'agit d'*intérêts composés*.
- 3 *Notion sous-jacente* : les *suites géométriques*.

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Proposition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *géométrique de raison q et de premier terme u_0* si, et seulement si

$$u_n = u_0 q^n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Proposition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *géométrique de raison q et de premier terme u_0* si, et seulement si

$$u_n = u_0 q^n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Proposition

Si un capital C_0 est placé à *intérêts composés* et au *taux τ* par période la valeur acquise V_n au terme de la n^e période est donnée par :

$$V_n = C_0 (1 + \tau)^n .$$

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0 , il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0 , il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

- 1 *Si k et n ont la même parité, la solution n'est pas unique.
En mathématiques financières, on retiendra celle de raison positive.*

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0 , il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

- 1 Si k et n ont la même parité, la solution n'est pas unique.
En mathématiques financières, on retiendra celle de raison positive.
- 2 Si u_0 ou r est connu, il n'y a qu'une seule équation à considérer.

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} .$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} &\iff \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^3 = \frac{q^6 u_0}{q^3 u_0} = \frac{640}{80} = 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_0 = \frac{80}{q^3} = \frac{80}{2^3} = 10 \\ q = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} &\iff \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^3 = \frac{q^6 u_0}{q^3 u_0} = \frac{640}{80} = 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_0 = \frac{80}{q^3} = \frac{80}{2^3} = 10 \\ q = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 10$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de 1,25%, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 années sera

$$V_{10} = C_0(1 + \tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des *intérêts perçus* en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45\text{€}$.

Exemple

Calculons la *valeur actuelle* C_0 de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de 4%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de 1,25%, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 années sera

$$V_{10} = C_0(1 + \tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des *intérêts perçus* en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45\text{€}$.

Exemple

Calculons la *valeur actuelle* C_0 de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de 4%. On a

$$\begin{aligned} V_3 = 100000 &\iff C_0(1 + \tau)^3 = 100000 \\ &\iff C_0 = \frac{100000}{(1 + \tau)^3} = \frac{100000}{1,04^3} \simeq 88899,64. \end{aligned}$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de 1,25%, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 années sera

$$V_{10} = C_0(1 + \tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des *intérêts perçus* en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45$ €.

Exemple

Calculons la *valeur actuelle* C_0 de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de 4%. On a

$$\begin{aligned} V_3 = 100000 &\iff C_0(1 + \tau)^3 = 100000 \\ &\iff C_0 = \frac{100000}{(1 + \tau)^3} = \frac{100000}{1,04^3} \simeq 88899,64. \end{aligned}$$

La *valeur actuelle* recherchée est d'environ 88899,64€.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.

On a :

$$V_{20} = 4000 \iff C_0 (1 + \tau)^{20} = 4000$$

$$\iff 3000 (1 + \tau)^{20} = 4000$$

$$\iff (1 + \tau)^{20} = \frac{4}{3}$$

$$\iff 1 + \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}}$$

$$\iff \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1$$

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.

On a :

$$\begin{aligned}V_{20} = 4000 &\iff C_0 (1 + \tau)^{20} = 4000 \\ &\iff 3000 (1 + \tau)^{20} = 4000 \\ &\iff (1 + \tau)^{20} = \frac{4}{3} \\ &\iff 1 + \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} \\ &\iff \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1\end{aligned}$$

Ainsi, le **taux annuel** du placement est de $\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 \simeq 1,45\%$.

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Pour déterminer à partir de quel rang N la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépasse A , il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned}u_n \geq A &\iff u_0 q^n \geq A \\ &\iff q^n \geq \frac{A}{u_0} && \text{(car } u_0 > 0\text{)} \\ &\iff \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{u_0}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)} \\ &\iff n \ln(q) \geq \ln(A) - \ln(u_0) && \text{(par les propriétés de } \ln\text{)} \\ &\iff n \geq \frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)} && \text{(car } q > 1 \text{ et donc } \ln(q) > 0\text{).}\end{aligned}$$

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Pour déterminer à partir de quel rang N la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépasse A , il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned}u_n \geq A &\iff u_0 q^n \geq A \\ &\iff q^n \geq \frac{A}{u_0} && \text{(car } u_0 > 0 \text{)} \\ &\iff \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{u_0}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)} \\ &\iff n \ln(q) \geq \ln(A) - \ln(u_0) && \text{(par les propriétés de } \ln \text{)} \\ &\iff n \geq \frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)} && \text{(car } q > 1 \text{ et donc } \ln(q) > 0 \text{).}\end{aligned}$$

Ainsi, le choix de N comme le plus petit entier supérieur à $\frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)}$ convient.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de 0,75%.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de 0,75%.

Déterminons **combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital** placé si aucun autre versement n'est fait.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de 0,75%.

Déterminons **combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital** placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de 0,75%.

Déterminons **combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital** placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

On a :

$$\begin{aligned} V_n \geq 2C_0 &\iff C_0 \times 1,0075^n \geq 2C_0 \\ &\iff 1,0075^n \geq 2 \\ &\iff n \ln(1,0075) = \ln(1,0075^n) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,0075)} \simeq 92,77 \end{aligned}$$

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de 0,75%.

Déterminons **combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital** placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

On a :

$$\begin{aligned} V_n \geq 2C_0 &\iff C_0 \times 1,0075^n \geq 2C_0 \\ &\iff 1,0075^n \geq 2 \\ &\iff n \ln(1,0075) = \ln(1,0075^n) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,0075)} \simeq 92,77 \end{aligned}$$

Il faudra être patient et attendre **au moins 93 ans pour doubler la mise !**

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- ▶ *Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'**annuités** (ou **mensualités** s'ils ont lieu tous les mois).*

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- ▶ Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'*annuités* (ou *mensualités* s'ils ont lieu tous les mois).
- ▶ Il faut faire attention :
 - au type d'intérêts utilisé,

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- ▶ Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'*annuités* (ou *mensualités* s'ils ont lieu tous les mois).
- ▶ Il faut faire attention :
 - au type d'intérêts utilisé,
 - au fait que les versements soient effectués en début ou fin de période.

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- ▶ Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'*annuités* (ou *mensualités* s'ils ont lieu tous les mois).
- ▶ Il faut faire attention :
 - au *type d'intérêts utilisé*,
 - au fait que les versements soient effectués en *début ou fin de période*.
- ▶ On pourra utiliser *un schéma intuitif* pour éviter les erreurs de compte de périodes

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- ▶ un axe horizontal représentant le temps et les périodes,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- ▶ un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- ▶ une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- ▶ un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- ▶ une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- ▶ les montants versés ou retirés,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- ▶ un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- ▶ une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- ▶ les montants versés ou retirés,
- ▶ et un œil indiquant l'instant auquel on « regarde » la valeur des sommes versées et retirées.

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- ▶ un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- ▶ une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- ▶ les montants versés ou retirés,
- ▶ et un œil indiquant l'instant auquel on « regarde » la valeur des sommes versées et retirées.

Remarque

On sera attentif au sens dans lequel on parcourt les périodes en allant de la (ou des) flèche(s) vers l'œil (puisque'il influe sur le signe de l'exposant ou du multiplicande).

Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Illustrations

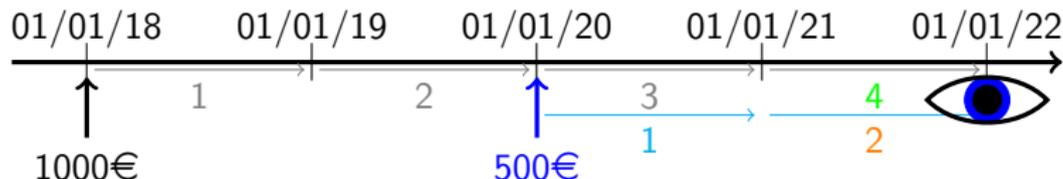
On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Quelle sera la **valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022** ?

Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

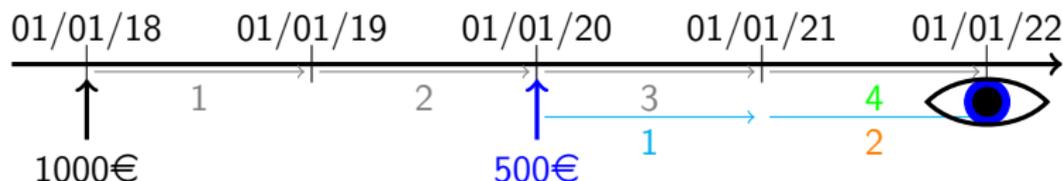
Quelle sera la **valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022** ?



Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Quelle sera la **valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022** ?



Ainsi, la valeur capitalisée au 01/01/2022 est :

$$1000 \times (1 + \tau)^4 + 500 \times (1 + \tau)^2 = 1000 \times 1,03^4 + 500 \times 1,03^2 \simeq 1655,96\text{€}.$$

Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

Sachant qu'il n'y a pas eu d'autre retrait ou versement et qu'il y avait 6000€ sur le livret le 01/01/21, quelle somme a été placée le 01/01/2018 ?



Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

Sachant qu'il n'y a pas eu d'autre retrait ou versement et qu'il y avait 6000€ sur le livret le 01/01/21, quelle somme a été placée le 01/01/2018 ?



Ainsi, la valeur de la somme placée est la valeur actualisée au 01/01/2018 :

$$6000 \times 1,02^{-3} \simeq 5653,93\text{€}.$$

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- ▶ 100€ au début du premier mois,
- ▶ 150€ au début du deuxième mois,
- ▶ 120€ au début du troisième mois.

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- ▶ 100€ au début du premier mois,
- ▶ 150€ au début du deuxième mois,
- ▶ 120€ au début du troisième mois.

Combien pourra-t-elle emprunter ?

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- ▶ 100€ au début du premier mois,
- ▶ 150€ au début du deuxième mois,
- ▶ 120€ au début du troisième mois.

Combien pourra-t-elle emprunter ?

La valeur actuelle de cette suite d'annuités est :

$$V_0 = 100 + 150 \times 1,02^{-1} + 120 \times 1,02^{-2} \simeq 362,40\text{€}.$$

Elle peut donc emprunter 362,40€ et paiera $100 + 150 + 120 - 362,40 = 7,60\text{€}$ d'intérêts.

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de **sommes de termes consécutifs** de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de **sommes de termes consécutifs** de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

▶ à utiliser

- les formules pour les **suites arithmétiques** si les intérêts sont **simples**,

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de **sommes de termes consécutifs** de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

▶ à utiliser

- les formules pour les **suites arithmétiques** si les intérêts sont **simples**,
- les formules pour les **suites géométriques** si les intérêts sont **composés**,

Annuités constantes et sommes de termes consécutifs de suites

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de **sommes de termes consécutifs** de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- ▶ à utiliser
 - les formules pour les **suites arithmétiques** si les intérêts sont **simples**,
 - les formules pour les **suites géométriques** si les intérêts sont **composés**,
- ▶ au fait que les annuités soient versées **en début ou en fin de période**,

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de **sommes de termes consécutifs** de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- ▶ à utiliser
 - les formules pour les **suites arithmétiques** si les intérêts sont **simples**,
 - les formules pour les **suites géométriques** si les intérêts sont **composés**,
- ▶ au fait que les annuités soient versées **en début ou en fin de période**,
- ▶ aux **termes initiaux** et aux **nombre de termes** dans chacune des sommes.

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r. \end{aligned}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r. \end{aligned}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r. \end{aligned}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme :

$$\begin{array}{rcccccc} S_n & = & u_0 & & + u_0 + r & & + \dots & + u_0 + (n-2)r & + u_0 + (n-1)r \\ + S_n & = & u_0 + (n-1)r & & + u_0 + (n-2)r & & + \dots & + u_0 + r & + u_0 \\ \hline 2S_n & = & 2u_0 + (n-1)r & & + 2u_0 + (n-1)r & & + \dots & + 2u_0 + (n-1)r & + 2u_0 + (n-1)r \end{array}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r. \end{aligned}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme :

$$\begin{array}{r} S_n = u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r \\ + S_n = u_0 + (n-1)r + u_0 + (n-2)r + \dots + u_0 + r + u_0 \\ \hline 2S_n = 2u_0 + (n-1)r + 2u_0 + (n-1)r + \dots + 2u_0 + (n-1)r + 2u_0 + (n-1)r \end{array}$$

Donc

$$2S_n = n(2u_0 + (n-1)r) = n(u_0 + u_{n-1}),$$

d'où

$$S_n = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2},$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \cdots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2},$$

$$\bar{S}_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2},$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \cdots + u_{n-1} = \frac{(n-1)(u_1 + u_{n-1})}{2}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Tout retenir d'un coup

La **somme** de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** est donnée par :

$$\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg \times \ll \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme de la somme})}{2} \gg .$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Tout retenir d'un coup

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$\frac{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg \times \ll (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme de la somme}) \gg}{2}.$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
Alors,

$$\bar{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(1+1+2n)}{2} = (n+1)^2.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n :

$$\begin{aligned} (1 - q)S_n &= S_n - qS_n \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q(u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0) \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - qu_0 - \dots - q^{n-2}u_0 - q^{n-1}u_0 - q^n u_0 \\ &= u_0(1 - q^n). \end{aligned}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n :

$$\begin{aligned} (1 - q)S_n &= S_n - qS_n \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q(u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0) \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - qu_0 - \dots - q^{n-2}u_0 - q^{n-1}u_0 - q^n u_0 \\ &= u_0(1 - q^n). \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Alors, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad n \geq 1$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad n \geq 1$$

$$\bar{S}_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad n \geq 0$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \dots + u_{n-1} = u_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}, \quad n \geq 2.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Tout retenir d'un coup

La **somme** de termes consécutifs d'une suite **géométrique** est donnée par :

$$\ll 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \gg \times \frac{1 - \ll \text{raison} \gg^{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg}}{1 - \ll \text{raison} \gg}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Tout retenir d'un coup

La **somme** de termes consécutifs d'une suite **géométrique** est donnée par :

$$\ll 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \gg \times \frac{1 - \ll \text{raison} \gg^{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg}}{1 - \ll \text{raison} \gg}.$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Alors,

$$S_9 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{10}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1048575}{262144}$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} = 4 - \frac{1}{4^n}.$$

Applications en mathématiques financières

Proposition

- ① *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_n = a(1 + \tau) \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau}.$$

- ② *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_0 = a(1 + \tau) \frac{1 - (1 + \tau)^{-n}}{\tau}.$$

- ③ *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_n = a \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau}.$$

- ④ *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + \tau)^{-n}}{\tau}.$$

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de *fin de période* et les intérêts *composés*.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de *fin de période* et les intérêts *composés*.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un *seul* prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n *annuités* a_1, \dots, a_n au prêteur pour rembourser le *capital* C *prêté* ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de **fin de période** et les intérêts **composés**.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un **seul** prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n **annuités** a_1, \dots, a_n au prêteur pour rembourser le **capital** C **prêté** ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.

Chaque annuité a_k se décompose en :

- ▶ un **amortissement** m_k servant à rembourser une part du capital emprunté,
- ▶ un paiement des **intérêts de la période** $I_k = C_{k-1}\tau$ avec C_{k-1} le **capital restant dû au début de la période** correspondant au k^e versement.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de **fin de période** et les intérêts **composés**.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un **seul** prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n **annuités** a_1, \dots, a_n au prêteur pour rembourser le **capital** C prêté ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.

Chaque annuité a_k se décompose en :

- ▶ un **amortissement** m_k servant à rembourser une part du capital emprunté,
- ▶ un paiement des **intérêts de la période** $I_k = C_{k-1}\tau$ avec C_{k-1} le **capital restant dû au début de la période** correspondant au k^e versement.

Tableau d'amortissement :

Période n° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = C_0\tau$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1\tau$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
...
k	$C_{k-1} = C_{k-2} - m_{k-1}$	$I_k = C_{k-1}\tau$	m_k	$a_k = I_k + m_k$
...
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1}\tau$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

① On a :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

① On a :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

② Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^k m_j$. En particulier,

$$C_{n-1} = m_n.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

① On a :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

② Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^k m_j$. En particulier,

$$C_{n-1} = m_n.$$

③ Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - (1 + \tau)m_k.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

① On a :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

② Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^k m_j$. En particulier,

$$C_{n-1} = m_n.$$

③ Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - (1 + \tau)m_k.$$

④ On a :

$$a_n = m_n(1 + \tau).$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** I_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts** de la première période I_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** I_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** I_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** I_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le **taux de l'emprunt** est de **5%**.

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** l_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le **taux de l'emprunt est de 5%**. On a

$$l_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000\text{€},$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** l_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le **taux de l'emprunt** est de **5%**. On a

$$C_0\tau = l_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000\text{€},$$

donc le **capital emprunté** est :

$$C_0 = \frac{l_1}{\tau} = \frac{1000}{0,05} = 20000\text{€}.$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000\text{€}$, $m_2 = 2000\text{€}$, $a_1 = 2000\text{€}$ et $a_2 = 2950\text{€}$.

But : Déterminer le **taux** τ de l'emprunt, le montant des **intérêts de la première période** l_1 puis le **capital emprunté** C_0 .

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1 = 2000 - (1 + \tau)1000$$

donc

$$1000(1 + \tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le **taux de l'emprunt** est de **5%**. On a

$$C_0\tau = l_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000\text{€},$$

donc le **capital emprunté** est :

$$C_0 = \frac{l_1}{\tau} = \frac{1000}{0,05} = 20000\text{€}.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1			200	240
2			300	
3			300	
4			200	

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1			200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000		200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	$1000-200=800$	$800 \times$	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	$1000-200=800$	$800 \times$	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$C_0 \tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	$1000-200=800$	$800 \times 0,04=32$	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	$1000-200=800$	$800 \times 0,04=32$	300	$300+32=332$
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	$1000-200=800$	$800 \times 0,04=32$	300	$300+32=332$
3	500	20	300	320
4	200	8	200	208

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000\text{€}$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40\text{€}$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

- 1 Les $n - 1$ premiers amortissements sont nuls ($m_1, \dots, m_{n-1} = 0$) et $m_n = C_0$.

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

- 1 Les $n - 1$ premiers amortissements sont nuls ($m_1, \dots, m_{n-1} = 0$) et $m_n = C_0$.
- 2 Le capital restant à rembourser n'évolue pas avant le terme du contrat :

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

- 1 Les $n - 1$ premiers amortissements sont nuls ($m_1, \dots, m_{n-1} = 0$) et $m_n = C_0$.
- 2 Le capital restant à rembourser n 'évolue pas avant le terme du contrat :

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}.$$

- 3 Pour $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, l'annuité a_k ne sert qu'à rembourser les intérêts de la période et vaut :

$$a_k = I_k = C_{k-1}\tau = C_0\tau.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

- 1 Les $n - 1$ premiers amortissements sont nuls ($m_1, \dots, m_{n-1} = 0$) et $m_n = C_0$.
- 2 Le capital restant à rembourser n'évolue pas avant le terme du contrat :

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}.$$

- 3 Pour $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, l'annuité a_k ne sert qu'à rembourser les intérêts de la période et vaut :

$$a_k = I_k = C_{k-1}\tau = C_0\tau.$$

- 4 La dernière annuité vaut quant à elle :

$$a_n = I_n + m_n = C_{n-1}\tau + m_n = C_0\tau + C_0 = C_0(1 + \tau).$$

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ pour un certain m .

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ pour un certain m .

Proposition

Pour un emprunt à amortissements constants, on a :

- ① pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$m_k = \frac{C_0}{n} ;$$

- ② pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{C_0 \tau}{n} .$$

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ pour un certain m .

Proposition

Pour un emprunt à amortissements constants, on a :

- ① pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$m_k = \frac{C_0}{n} ;$$

- ② pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{C_0\tau}{n}.$$

Remarque

a_1, \dots, a_n sont les n premiers termes de la suite arithmétique de raison $-\frac{C_0\tau}{n}$ et de premier terme $a_1 = C_0 \left(\tau + \frac{1}{n} \right)$. En particulier, les annuités sont dégressives.

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1		$\times 0,03 =$	600	$600+ =$
2	-600=	$\times 0,03 =$	600	$600+ =$
3	-600=	$\times 0,03 =$	600	$600+ =$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1		$\times 0,03 =$	600	$600+ =$
2	-600= $=$	$\times 0,03 =$	600	$600+ =$
3	-600= $=$	$\times 0,03 =$	600	$600+ =$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR.}$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800 \times 0,03 = 54$	600	$600 + 54 = 654$
2	$1800 - 600 = 1200$	$\times 0,03 =$	600	$600 + =$
3	$-600 =$	$\times 0,03 =$	600	$600 + =$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800 \text{EUR.}$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800 \times 0,03 = 54$	600	$600 + 54 = 654$
2	$1800 - 600 = 1200$	$1200 \times 0,03 = 36$	600	$600 + 36 = 636$
3	$1200 - 600 = 600$	$\times 0,03 =$	600	$600 + =$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR.}$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois ^o k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800 \times 0,03 = 54$	600	$600 + 54 = 654$
2	$1800 - 600 = 1200$	$1200 \times 0,03 = 36$	600	$600 + 36 = 636$
3	$1200 - 600 = 600$	$600 \times 0,03 = 18$	600	$600 + 18 = 618$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR.}$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

On a :

$$l_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées. On a :

$$3000 = C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = 300n.$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées. On a :

$$3000 = C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = 300n.$$

Il y aura donc $n = \frac{3000}{300} = 10$ annuités versées.

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain a .

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain a .

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

① *pour tout $k \in \{1, \dots, n - 1\}$:*

$$m_{k+1} = m_k(1 + \tau);$$

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain a .

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

- ① pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$m_{k+1} = m_k(1 + \tau);$$

- ② $m_1 = \frac{C_0 \tau}{(1+\tau)^n - 1}$;

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain a .

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

❶ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$m_{k+1} = m_k(1 + \tau);$$

❷ $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1};$

❸ $a = a_k = \frac{C_0\tau}{1 - (1+\tau)^{-n}}.$

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain a .

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

- ❶ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$m_{k+1} = m_k(1 + \tau);$$

❷ $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$;

❸ $a = a_k = \frac{C_0\tau}{1 - (1+\tau)^{-n}}$.

Remarque

m_1, \dots, m_n sont les n premiers termes de la suite géométrique de raison $(1 + \tau)$ et de premier terme $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$. En particulier, les amortissements sont croissants.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de 0,2%, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de 0,2%, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de 0,2%, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1 - (1 + \tau)^{-n}}$$

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de 0,2%, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$1050,09 = a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1 - (1 + \tau)^{-n}} = \frac{C_0 \times 0,002}{1 - 1,002^{-240}} = C_0 \times \frac{0,002}{1 - 1,002^{-240}}$$

puisque $20 \times 12 = 240$ mensualités seront versées.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de 0,2%, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$1050,09 = a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1 - (1 + \tau)^{-n}} = \frac{C_0 \times 0,002}{1 - 1,002^{-240}} = C_0 \times \frac{0,002}{1 - 1,002^{-240}}$$

puisque $20 \times 12 = 240$ mensualités seront versées.

Le **capital emprunté** est donc :

$$C_0 = 1050,09 \times \frac{1 - 1,002^{-240}}{0,002} \simeq 200000,10\text{€}.$$