R1.10: Finance

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2023-2024
Semestre 1

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts simples et au taux τ par période si les intérêts de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La valeur acquise au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à intérêts simples, au taux τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts simples et au taux τ par période si les intérêts de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La valeur acquise au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à intérêts simples, au taux τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

1. *Les intérêts ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.*

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts simples et au taux τ par période si les intérêts de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La valeur acquise au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à intérêts simples, au taux τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

1. *Les intérêts ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.*
2. *Dans la pratique, les intérêts simples ne sont que rarement utilisés. Ils le sont généralement pour des placements à court terme (moins d'un an).*

Intérêts simples

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts simples et au taux τ par période si les intérêts de chaque période sont donnés par :

$$I = C_0\tau.$$

La valeur acquise au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à intérêts simples, au taux τ est alors :

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque

1. *Les intérêts ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.*
2. *Dans la pratique, les intérêts simples ne sont que rarement utilisés. Ils le sont généralement pour des placements à court terme (moins d'un an).*
3. *Notion sous-jacente : les suites arithmétiques.*

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}.$$

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Proposition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si

$$u_n = u_0 + nr, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Suites arithmétiques

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

La suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}.$$

Proposition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si

$$u_n = u_0 + nr, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Remarque

Une suite arithmétique est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite arithmétique

Si l'on connaît deux termes d'une suite arithmétique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison r et son premier terme u_0, il suffit d'écrire que r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + kr = u_k = a \\ u_0 + nr = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

Si u_0 ou r est connu, il n'y a qu'une seule équation à considérer.

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases}.$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} u_0 & +3r & = 9 \\ u_0 & +7r & = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + & 3r & = 9 \\ & 4r & = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_0 = 9 - 3r = 9 - 3 \times 2 = 3 \\ r = 2 \end{cases}.$$

Un exemple

Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a

$$9 = u_3 = u_0 + 3r \text{ et } 17 = u_7 = u_0 + 7r.$$

Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} u_0 & +3r & = 9 \\ u_0 & +7r & = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + & 3r & = 9 \\ & 4r & = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_0 = 9 - 3r = 9 - 3 \times 2 = 3 \\ r = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 500€ à intérêts simples au taux annuel de $0,75\%$*, les intérêts de chaque période s'élèveront à* $I = 3,75$€*.*
Après 20 années, le capital acquis sera

$$V_{20} = C_0 + 20I = 500 + 20 \times 3,75 = 575€.$$

On aura donc touché $575 - 500 = 75$€ *d'intérêts.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 500€ à intérêts simples au taux annuel de $0,75\%$, *les intérêts de chaque période s'élèveront à* $I = 3,75€$.
Après 20 années, le capital acquis sera

$$V_{20} = C_0 + 20I = 500 + 20 \times 3,75 = 575€.$$

On aura donc touché $575 - 500 = 75€$ *d'intérêts.*

Remarque

V_{20} *est appelée valeur capitalisée après 20 ans.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé valeur actuelle, *pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.*

Applications en mathématiques financières

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé valeur actuelle*, pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.*
On a :

$$
\begin{aligned}
V_5 = 11500 &\Longleftrightarrow V_0 + 5I = 11500 \\
&\Longleftrightarrow V_0 + 5I = 11500 \\
&\Longleftrightarrow C_0 + 5\tau C_0 = 11500 \\
&\Longleftrightarrow C_0(1 + 5 \times 0,03) = 11500 \\
&\Longleftrightarrow C_0 = \frac{11500}{1,15} = 10000
\end{aligned}
$$

Exemple

Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%.

On souhaite déterminer le capital C_0 à investir, appelé valeur actuelle, pour obtenir au bout de 5 ans une valeur acquise de 11500€.
On a :

$$\begin{aligned} V_5 = 11500 &\iff V_0 + 5I = 11500 \\ &\iff V_0 + 5I = 11500 \\ &\iff C_0 + 5\tau C_0 = 11500 \\ &\iff C_0(1 + 5 \times 0,03) = 11500 \\ &\iff C_0 = \frac{11500}{1,15} = 10000 \end{aligned}$$

La valeur actuelle de 11500€ dans 5 ans au taux simple de 3% est de 10000€.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.
On cherche le taux mensuel du placement.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.
On cherche le taux mensuel du placement.
La relation $V_n = C_0 + nI$ entraine que les intérêts de chaque période s'élèvent à

$$I = \frac{1}{n}(V_n - C_0) = \frac{1}{8}(20400 - 20000) = 50€.$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On suppose que 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois.
On cherche le taux mensuel du placement.
La relation $V_n = C_0 + nI$ *entraine que les intérêts de chaque période s'élèvent à*

$$I = \frac{1}{n}(V_n - C_0) = \frac{1}{8}(20400 - 20000) = 50€.$$

On en déduit que le taux mensuel du placement est de $\tau = \frac{I}{C_0} = \frac{50}{20000} = 0,25\%$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.
On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.
On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 1500 &\iff C_0 + nI = C_0 + nC_0\tau \geq 1500 \\ &\iff 1000 + n \times 1000 \times 0,07 \geq 1500 \\ &\iff 70n \geq 500 \\ &\iff n \geq \frac{500}{70} \simeq 7,1. \end{aligned}$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%.

Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€.
On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 1500 &\iff C_0 + nI = C_0 + nC_0\tau \geq 1500 \\ &\iff 1000 + n \times 1000 \times 0,07 \geq 1500 \\ &\iff 70n \geq 500 \\ &\iff n \geq \frac{500}{70} \simeq 7,1. \end{aligned}$$

Il faudra attendre au moins 8 ans pour obtenir une valeur acquise $\geq$ 1500€.

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts composés et au taux τ par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la valeur acquise V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts composés et au taux τ par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la valeur acquise V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

1. *Les intérêts d'une période portent ici sur la valeur acquise au début de la période.*

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts composés et au taux τ par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la valeur acquise V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

1. *Les intérêts d'une période portent ici sur la valeur acquise au début de la période.*
2. *Les placement à intérêts composés sont les plus fréquents. Lorsqu'il n'est pas précisé si un placement est rémunéré par des intérêts simples ou composés, on considère par défaut qu'il s'agit d'intérêts composés.*

Intérêts composés

Définition

On dit qu'un capital C_0 est placé à intérêts composés et au taux τ par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la valeur acquise V_{n-1} au début de cette période par la formule :

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

Remarque

1. *Les intérêts d'une période portent ici sur la valeur acquise au début de la période.*
2. *Les placement à intérêts composés sont les plus fréquents. Lorsqu'il n'est pas précisé si un placement est rémunéré par des intérêts simples ou composés, on considère par défaut qu'il s'agit d'intérêts composés.*
3. *Notion sous-jacente : les suites géométriques.*

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} .$$

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}.$$

Proposition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si

$$u_n = u_0 q^n, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Suites géométrique et intérêts composés

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

La suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = q u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{array}\right. .$$

Proposition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si

$$u_n = u_0 q^n, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Proposition

Si un capital C_0 est placé à intérêts composés et au taux τ par période la valeur acquise V_n au terme de la n^e période est donnée par :

$$V_n = C_0 (1+\tau)^n.$$

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0, il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0, il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

1. *Si k et n ont la même parité, la solution n'est pas unique.*
   En mathématiques financières, on retiendra celle de raison positive.

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Si l'on connaît deux termes d'une suite géométrique $u_k = a$ et $u_n = b$, pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0, il suffit d'écrire que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 q^k = u_k = a \\ u_0 q^n = u_n = b \end{cases}$$

et de résoudre ce système.

Remarque

1. *Si k et n ont la même parité, la solution n'est pas unique.*
   En mathématiques financières, on retiendra celle de raison positive.
2. *Si u_0 ou r est connu, il n'y a qu'une seule équation à considérer.*

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases}.$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{array} \right. .$$

Or, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} q^3 u_0 = 80 \\ q^3 = \frac{q^6 u_0}{q^3 u_0} = \frac{640}{80} = 8 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{80}{q^3} = \frac{80}{2^3} = 10 \\ q = \sqrt[3]{8} = 2 \end{array} \right.$$

Un exemple

Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a

$$80 = u_3 = q^3 u_0 \text{ et } 640 = u_6 = q^6 u_0.$$

Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} \iff \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^3 = \frac{q^6 u_0}{q^3 u_0} = \frac{640}{80} = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_0 = \frac{80}{q^3} = \frac{80}{2^3} = 10 \\ q = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 10$.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de $1,25\%$*, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 année sera*

$$V_{10} = C_0(1+\tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des intérêts perçus en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45$€.

Exemple

Calculons la valeur actuelle C_O *de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de* 4%.

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de $1,25\%$*, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 année sera*

$$V_{10} = C_0(1+\tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des intérêts perçus en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45$*€.*

Exemple

Calculons la valeur actuelle C_O *de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de* 4%*. On a*

$$\begin{aligned} V_3 = 100000 &\Longleftrightarrow C_0(1+\tau)^3 = 100000 \\ &\Longleftrightarrow C_0 = \frac{100000}{(1+\tau)^3} = \frac{100000}{1,04^3} \simeq 88899,64. \end{aligned}$$

Applications en mathématiques financières

Exemple

Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de $1,25\%$*, la valeur acquise (ou capitalisée) après 10 année sera*

$$V_{10} = C_0(1+\tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$$

Le montant total des intérêts perçus en 10 ans s'élève à $226,45 - 200 = 26,45$*€.*

Exemple

Calculons la valeur actuelle C_O *de la somme de 100000€ dans 3 ans sur placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de* 4%*. On a*

$$\begin{aligned} V_3 = 100000 &\Longleftrightarrow C_0(1+\tau)^3 = 100000 \\ &\Longleftrightarrow C_0 = \frac{100000}{(1+\tau)^3} = \frac{100000}{1,04^3} \simeq 88899,64. \end{aligned}$$

La valeur actuelle recherchée est d'environ 88899,64€.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.

On a :

$$\begin{aligned} V_{20} = 4000 &\iff C_0 \left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\iff 3000 \left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\iff \left(1+\tau\right)^{20} = \frac{4}{3} \\ &\iff 1+\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} \\ &\iff \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 \end{aligned}$$

Applications en mathématiques financières

Supposons que 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans.

Déterminons le taux annuel du placement.
On a :

$$\begin{aligned} V_{20} = 4000 &\Longleftrightarrow C_0\left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\Longleftrightarrow 3000\left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\Longleftrightarrow \left(1+\tau\right)^{20} = \frac{4}{3} \\ &\Longleftrightarrow 1+\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} \\ &\Longleftrightarrow \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le taux annuel du placement est de $\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 \simeq 1,45\%$.

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.
Pour déterminer à partir de quel rang N la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dépasse A, il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned}
u_n \geq A &\iff u_0 q^n \geq A \\
&\iff q^n \geq \frac{A}{u_0} && \text{(car } u_0 > 0\text{)} \\
&\iff \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{u_0}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)} \\
&\iff n\ln(q) \geq \ln(A) - \ln(u_0) && \text{(par les propriétés de } \ln\text{)} \\
&\iff n \geq \frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)} && \text{(car } q > 1 \text{ et donc } \ln(q) > 0\text{).}
\end{aligned}$$

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse A

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$.
Pour déterminer à partir de quel rang N la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dépasse A, il suffit d'écrire que :

$$
\begin{aligned}
u_n \geq A &\iff u_0 q^n \geq A \\
&\iff q^n \geq \frac{A}{u_0} && \text{(car } u_0 > 0\text{)} \\
&\iff \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{u_0}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)} \\
&\iff n\ln(q) \geq \ln(A) - \ln(u_0) && \text{(par les propriétés de } \ln\text{)} \\
&\iff n \geq \frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)} && \text{(car } q > 1 \text{ et donc } \ln(q) > 0\text{).}
\end{aligned}
$$

Ainsi, le choix de N comme le plus petit entier supérieur à $\frac{\ln(A)-\ln(u_0)}{\ln(q)}$ convient.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de $0,75\%$.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de $0,75\%$.

Déterminons combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital placé si aucun autre versement n'est fait.

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de $0,75\%$.

Déterminons combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de $0,75\%$.

Déterminons combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

On a :

$$\begin{aligned} V_n \geq 2C_0 &\iff C_0 \times 1,0075^n \geq 2C_0 \\ &\iff 1,0075^n \geq 2 \\ &\iff n\ln(1,0075) = \ln\left(1,0075^n\right) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,0075)} \simeq 92,77 \end{aligned}$$

Application en mathématiques financières

Un produit financier est rémunéré au taux annuel de $0,75\%$.

Déterminons combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital placé si aucun autre versement n'est fait.

On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

On a :

$$\begin{aligned} V_n \geq 2C_0 &\iff C_0 \times 1,0075^n \geq 2C_0 \\ &\iff 1,0075^n \geq 2 \\ &\iff n \ln(1,0075) = \ln\left(1,0075^n\right) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,0075)} \simeq 92,77 \end{aligned}$$

Il faudra être patient et attendre au moins 93 ans pour doubler la mise !

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- *Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'annuités (ou mensualités s'ils ont lieu tous les mois).*

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- *Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'annuités (ou mensualités s'ils ont lieu tous les mois).*
- *Il faut faire attention :*
  - *au type d'intérêts utilisé,*

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- *Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'annuités (ou mensualités s'ils ont lieu tous les mois).*
- *Il faut faire attention :*
  - *au type d'intérêts utilisé,*
  - *au fait que les versements soient effectués en début ou fin de période.*

Cas de plusieurs versements à différents instants

Point méthodologique

Si plusieurs versements (ou retraits) ont lieu à des instants différents, pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée de la suite de mouvements, il suffit de sommer les contributions de chacun de ceux-ci.

Remarque

- *Si les versements ont lieu à intervalle de temps réguliers, on parle d'annuités (ou mensualités s'ils ont lieu tous les mois).*
- *Il faut faire attention :*
  - *au type d'intérêts utilisé,*
  - *au fait que les versements soient effectués en début ou fin de période.*
- *On pourra utiliser un schéma intuitif pour éviter les erreurs de compte de périodes*

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- les montants versés ou retirés,

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- les montants versés ou retirés,
- et un œil indiquant l'instant auquel on « regarde » la valeur des sommes versées et retirées.

Un schéma intuitif pour éviter les erreurs

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :

- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- les montants versés ou retirés,
- et un œil indiquant l'instant auquel on « regarde » la valeur des sommes versées et retirées.

Remarque

On sera attentif au sens dans lequel on parcourt les périodes en allant de la (ou des) flèche(s) vers l'œil (puisqu'il influe sur le signe de l'exposant ou du multiplicande).

Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Illustrations

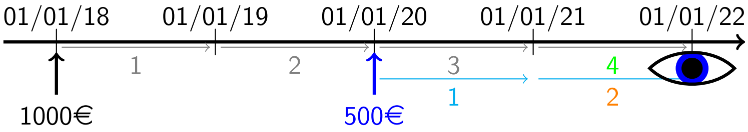
On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Quelle sera la valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022 ?

Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

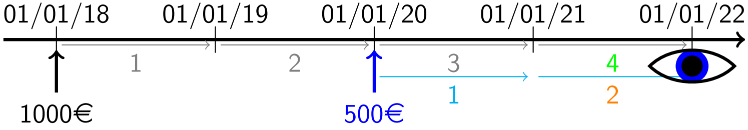
Quelle sera la valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022 ?



Illustrations

On a placé 1000€ le 01/01/2018 et 500€ le 01/01/2020 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%.

Quelle sera la valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022 ?



Ainsi, la valeur capitalisée au 01/01/2022 est :

$$1000 \times (1+\tau)^4 + 500 \times (1+\tau)^2 = 1000 \times 1,03^4 + 500 \times 1,03^2 \simeq 1655,96€.$$

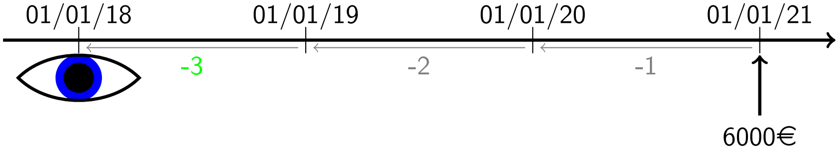
Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

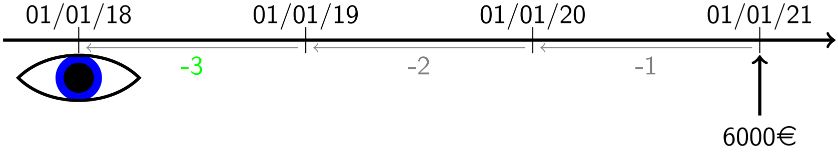
Sachant qu'il n'y a pas eu d'autre retrait ou versement et qu'il y avait 6000€ sur le livret le 01/01/21, quelle somme a été placée le 01/01/2018 ?



Illustrations

On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%.

Sachant qu'il n'y a pas eu d'autre retrait ou versement et qu'il y avait 6000€ sur le livret le 01/01/21, quelle somme a été placée le 01/01/2018 ?



Ainsi, la valeur de la somme placée est la valeur actualisée au 01/01/2018 :

$$6000 \times 1,02^{-3} \simeq 5653,93€.$$

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- 100€ au début du premier mois,
- 150€ au début du deuxième mois,
- 120€ au début du troisième mois.

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- 100€ au début du premier mois,
- 150€ au début du deuxième mois,
- 120€ au début du troisième mois.

Combien pourra-t-elle emprunter ?

Vers les emprunts

Une personne souhaite emprunter au taux de 2% sur 3 mois.

Elle est prête à verser

- 100€ au début du premier mois,
- 150€ au début du deuxième mois,
- 120€ au début du troisième mois.

Combien pourra-t-elle emprunter ?

La valeur actuelle de cette suite d'annuités est :

$$V_0 = 100 + 150 \times 1,02^{-1} + 120 \times 1,02^{-2} \simeq 362,40€.$$

Elle peut donc emprunter 362,40€ et paiera $100 + 150 + 120 - 362,40 = 7,60€$ d'intérêts.

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- *à utiliser*
  - *les formules pour les suites arithmétiques si les intérêts sont simples,*

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- *à utiliser*
  - *les formules pour les suites arithmétiques si les intérêts sont simples,*
  - *les formules pour les suites géométriques si les intérêts sont composés,*

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- *à utiliser*
  - *les formules pour les suites arithmétiques si les intérêts sont simples,*
  - *les formules pour les suites géométriques si les intérêts sont composés,*
- *au fait que les annuités soient versées en début ou en fin de période,*

Point méthodologique

Lorsque les annuités sont constantes, les formules de sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques permettent de réduire considérablement les calculs.

Remarque

On fera attention

- *à utiliser*
  - *les formules pour les suites arithmétiques si les intérêts sont simples,*
  - *les formules pour les suites géométriques si les intérêts sont composés,*
- *au fait que les annuités soient versées en début ou en fin de période,*
- *aux termes initiaux et aux nombres de termes dans chacune des sommes.*

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 \quad + u_1 \qquad + \ldots \quad + u_{n-2} \qquad\qquad + u_{n-1} \\ &= u_0 \quad + u_0 + r \quad + \ldots \quad + u_0 + (n-2)r \quad + u_0 + (n-1)r. \end{aligned}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 && +u_1 && +\ldots && +u_{n-2} && +u_{n-1} \\ &= u_0 && +u_0+r && +\ldots && +u_0+(n-2)r && +u_0+(n-1)r. \end{aligned}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{array}{rlllll} S_n & = u_0 & +u_1 & + \dots & +u_{n-2} & +u_{n-1} \\ & = u_0 & +u_0 + r & + \dots & +u_0 + (n-2)r & +u_0 + (n-1)r. \end{array}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme :

$$\begin{array}{cclllll} & S_n & = u_0 & +u_0 + r & + \dots & +u_0 + (n-2)r & +u_0 + (n-1)r \\ + & S_n & = u_0 + (n-1)r & +u_0 + (n-2)r & + \dots & +u_0 + r & +u_0 \\ \hline & 2S_n & = 2u_0 + (n-1)r & +2u_0 + (n-1)r & + \dots & +2u_0 + (n-1)r & +2u_0 + (n-1)r \end{array}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{array}{rlllll} S_n & = u_0 & + u_1 & + \dots & + u_{n-2} & + u_{n-1} \\ & = u_0 & + u_0 + r & + \dots & + u_0 + (n-2)r & + u_0 + (n-1)r. \end{array}$$

Astuce : écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et sommer terme à terme :

$$\begin{array}{crllllll} & S_n & = u_0 & + u_0 + r & + \dots & + u_0 + (n-2)r & + u_0 + (n-1)r \\ + & S_n & = u_0 + (n-1)r & + u_0 + (n-2)r & + \dots & + u_0 + r & + u_0 \\ \hline & 2S_n & = 2u_0 + (n-1)r & + 2u_0 + (n-1)r & + \dots & + 2u_0 + (n-1)r & + 2u_0 + (n-1)r \end{array}$$

Donc

$$2S_n = n\left(2u_0 + (n-1)r\right) = n\left(u_0 + u_{n-1}\right),$$

d'où

$$S_n = \frac{n\left(u_0 + u_{n-1}\right)}{2}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0*.*
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n\,(u_0 + u_{n-1})}{2},$$

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2},$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\,(u_0 + u_n)}{2},$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \cdots + u_{n-1} = \frac{(n-1)\,(u_1 + u_{n-1})}{2}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Tout retenir d'un coup

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$\frac{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg \ \times \ll (\ 1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme de la somme}\ ) \gg}{2}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Tout retenir d'un coup

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$\frac{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg \; \times \ll (\ 1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme de la somme}\ ) \gg}{2}.$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$. Alors,

$$\overline{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(1+1+2n)}{2} = (n+1)^2.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{array}{rlllll} S_n & = u_0 & +u_1 & +\dots & +u_{n-2} & +u_{n-1} \\ & = u_0 & +qu_0 & +\dots & +q^{n-2}u_0 & q^{n-1}u_0. \end{array}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 &+u_1 &\quad +\dots &+u_{n-2} &\quad +u_{n-1} \\ &= u_0 &+qu_0 &\quad +\dots &+q^{n-2}u_0 &\quad q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 \quad +u_1 \quad + \dots \quad +u_{n-2} \quad +u_{n-1} \\ &= u_0 \quad +qu_0 \quad + \dots \quad +q^{n-2}u_0 \quad q^{n-1}u_0. \end{aligned}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n :

$$\begin{aligned} (1-q)S_n &= S_n - qS_n \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q(u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0) \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q^n u_0 \\ &= u_0\,(1-q^n)\,. \end{aligned}$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0

But : Calculer

$$\begin{array}{llllll} S_n & = u_0 & +u_1 & +\dots & +u_{n-2} & +u_{n-1} \\ & = u_0 & +qu_0 & +\dots & +q^{n-2}u_0 & q^{n-1}u_0. \end{array}$$

Astuce : retrancher qS_n à S_n :

$$\begin{aligned} (1-q)S_n &= S_n - qS_n \\ &= u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q(u_0 + qu_0 + \dots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0) \\ &= u_0 + {\color{blue}qu_0} + \dots + {\color{green}q^{n-2}u_0} + {\color{red}q^{n-1}u_0} - {\color{blue}qu_0} + \dots + {\color{green}q^{n-2}u_0} + {\color{red}q^{n-1}u_0} - q^n u_0 \\ &= u_0\,(1-q^n)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Alors, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \ldots . u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad n \geq 1$$

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad n \geq 1$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad n \geq 0$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_1 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, \qquad n \geq 2.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Tout retenir d'un coup

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :

$$\ll 1^{\text{er}}\text{terme de la somme} \gg \;\times\; \frac{1 - \ll \text{raison} \gg^{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg}}{1 - \ll \text{raison} \gg}.$$

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Tout retenir d'un coup

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :

$$\ll 1^{\text{er}}\text{terme de la somme} \gg \ \times \ \frac{1 - \ll \text{raison} \gg^{\ll \text{nb de termes dans la somme} \gg}}{1 - \ll \text{raison} \gg}.$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{4}$ *et de premier terme* $u_0 = 3$. *Alors,*

$$S_9 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{10}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1048575}{262144}$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} = 4 - \frac{1}{4^n}.$$

Applications en mathématiques financières

Proposition

1. *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_n = a\,(1+\tau)\,\frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

2. *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_0 = a\,(1+\tau)\,\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau}.$$

3. *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_n = a\frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

4. *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux composé τ est donnée par :*

$$V_0 = a\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau}.$$

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de fin de période et les intérêts composés.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de fin de période et les intérêts composés.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un seul prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n annuités $a_1, \ldots, a_n$ au prêteur pour rembourser le capital C prêté ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de fin de période et les intérêts composés.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un seul prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n annuités $a_1, \ldots, a_n$ au prêteur pour rembourser le capital C prêté ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.
Chaque annuité a_k se décompose en :

- un amortissement m_k servant à rembourser une part du capital emprunté,
- un paiement des intérêts de la période $I_k = C_{k-1}\tau$ avec C_{k-1} le capital restant dû au début de la période correspondant au k^{e} versement.

Emprunts *indivis* - les principes

Pour la suite les annuités sont de fin de période et les intérêts composés.

Emprunt indivis

Un emprunt souscrit auprès d'un et un seul prêteur et faisant l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n annuités $a_1, \ldots, a_n$ au prêteur pour rembourser le capital C prêté ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.
Chaque annuité a_k se décompose en :

- un amortissement m_k servant à rembourser une part du capital emprunté,
- un paiement des intérêts de la période $I_k = C_{k-1}\tau$ avec C_{k-1} le capital restant dû au début de la période correspondant au k^{e} versement.

Tableau d'amortissement :

Période n° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = C_0\tau$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1\tau$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
...	...	...	...	...
k	$C_{k-1} = C_{k-2} - m_{k-1}$	$I_k = C_{k-1}\tau$	m_k	$a_k = I_k + m_k$
...	...	...	...	...
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1}\tau$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

1. *On a :*

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

1. *On a :*

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

2. *Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a* $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^{k} m_j$. *En particulier,*

$$C_{n-1} = m_n.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

1. *On a :*
$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

2. *Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a* $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^{k} m_j$. *En particulier,*
$$C_{n-1} = m_n.$$

3. *Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a :*
$$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - (1+\tau) m_k.$$

Emprunts *indivis* - formules génériques

Proposition

1. *On a :*

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

2. *Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a* $C_k = C_0 - \sum_{j=1}^{k} m_j$. *En particulier,*

$$C_{n-1} = m_n.$$

3. *Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a :*

$$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - (1+\tau)m_k.$$

4. *On a :*

$$a_n = m_n(1+\tau).$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$a_2 - a_1 = m_2 - (1 + \tau)m_1$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1+\tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le taux de l'emprunt est de 5%.

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1+\tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le taux de l'emprunt est de 5%. On a

$$I_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000€,$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le taux de l'emprunt est de 5%. On a

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000€,$$

donc le capital emprunté est :

$$C_0 = \frac{I_1}{\tau} = \frac{1000}{0,05} = 20000€.$$

Emprunts *indivis* - un exemple

On donne $m_1 = 1000€$, $m_2 = 2000€$, $a_1 = 2000€$ et $a_2 = 2950€$.

But : Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

On a

$$950 = 2950 - 2000 = a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1 = 2000 - (1+\tau)1000$$

donc

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050$$

donc

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le taux de l'emprunt est de 5%. On a

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000€,$$

donc le capital emprunté est :

$$C_0 = \frac{I_1}{\tau} = \frac{1000}{0,05} = 20000€.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1			200	240
2			300	
3			300	
4			200	

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1			200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000		200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2			300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	1000-200=800	800×	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	1000-200=800	800×	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	1000-200=800	800×0,04=32	300	
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	1000-200=800	800×0,04=32	300	300+32=332
3			300	
4			200	

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *indivis* - un autre exemple

Pour un emprunt sur 4 mois et on ne dispose que des informations suivantes.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	1000-200=800	800×0,04=32	300	300+32=332
3	500	20	300	320
4	200	8	200	208

But : tout compléter !

On a :

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$

et

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€$$

donc le taux mensuel est

$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

1. *Les $n-1$ premiers amortissements sont nuls* $(m_1, \ldots, m_{n-1} = 0)$ *et* $m_n = C_0$.

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

1. *Les* $n-1$ *premiers amortissements sont nuls* $(m_1, \ldots, m_{n-1} = 0)$ *et* $m_n = C_0$.
2. *Le capital restant à rembourser n'évolue pas avant le terme du contrat :*

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-1}.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

1. *Les* $n-1$ *premiers amortissements sont nuls* $(m_1, \dots, m_{n-1} = 0)$ *et* $m_n = C_0$.
2. *Le capital restant à rembourser n'évolue pas avant le terme du contrat :*

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-1}.$$

3. *Pour* $k \in \{1, \dots, n-1\}$, *l'annuité* a_k *ne sert qu'à rembourser les intérêts de la période et vaut :*

$$a_k = I_k = C_{k-1}\tau = C_0\tau.$$

Emprunts *in fine*

Emprunt *in fine*

Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.

Remarque

1. *Les $n-1$ premiers amortissements sont nuls $(m_1, \dots, m_{n-1} = 0)$ et $m_n = C_0$.*
2. *Le capital restant à rembourser n'évolue pas avant le terme du contrat :*

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}.$$

3. *Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, l'annuité a_k ne sert qu'à rembourser les intérêts de la période et vaut :*

$$a_k = I_k = C_{k-1}\tau = C_0\tau.$$

4. *La dernière annuité vaut quant à elle :*

$$a_n = I_n + m_n = C_{n-1}\tau + m_n = C_0\tau + C_0 = C_0(1+\tau).$$

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ pour un certain m.

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ pour un certain m.

Proposition

Pour un emprunt à amortissements constants, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *:*
$$m_k = \frac{C_0}{n}\,;$$
2. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*
$$a_{k+1} = a_k - \frac{C_0 \tau}{n}.$$

Emprunts à amortissements constants

Emprunt à amortissements constants

Les amortissements sont constants : $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ pour un certain m.

Proposition

Pour un emprunt à amortissements constants, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *:*
$$m_k = \frac{C_0}{n}\,;$$
2. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*
$$a_{k+1} = a_k - \frac{C_0\tau}{n}.$$

Remarque

$a_1, \ldots, a_n$ *sont les* n *premiers termes de la suite arithmétique de raison* $-\frac{C_0\tau}{n}$ *et de premier terme* $a_1 = C_0\tau\left(1 + \frac{1}{n}\right)$*. En particulier, les annuités sont dégressives.*

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Mois n° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1		$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$
2	-600=	$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$
3	-600=	$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1		$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$
2	-600$=$	$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$
3	-600$=$	$\times 0,03 =$	600	$600+ \quad =$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR}.$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800\times 0,03 =$54	600	600+54=54
2	1800-600=1200	$\times 0,03 =$	600	600+ =
3	-600=	$\times 0,03 =$	600	600+ =

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR}.$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800\times 0,03 =$54	600	600+54=54
2	1800-600=1200	$1200\times 0,03 =$36	600	600+36=636
3	1200-600=600	$\times 0,03 =$	600	600+ $=$

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR}.$$

Emprunts à amortissements constants - un exemple

Dressons le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1800	$1800\times 0,03 =54$	600	600+54=54
2	1800-600=1200	$1200\times 0,03 =36$	600	600+36=636
3	1200-600=600	$600\times 0,03 =18$	600	600+18=618

On a

$$C_0 = 3 \times 600 = 1800\text{EUR}.$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.
On a :

$$I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.
On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.
On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées.

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.
On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées. On a :

$$3000 = C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = 300n.$$

Emprunts à amortissements constants - un autre exemple

La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%.

But : Déterminer combien d'annuités seront versées.
On a :

$$C_0\tau = I_1 = a_1 - m_1 = 360 - 300 = 60$$

donc

$$C_0 = \frac{60}{\tau} = \frac{60}{0,02} = 3000$$

On note n le nombre d'annuités versées. On a :

$$3000 = C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = 300n.$$

Il y aura donc $n = \frac{3000}{300} = 10$ annuités versées.

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour un certain a.

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour un certain a.

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*

$$m_{k+1} = m_k(1+\tau)\,;$$

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour un certain a.

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*

$$m_{k+1} = m_k(1+\tau)\,;$$

2. $m_1 = \frac{C_0 \tau}{(1+\tau)^n - 1}\,;$

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour un certain a.

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*
$$m_{k+1} = m_k(1+\tau)\,;$$
2. $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$;
3. $a = a_k = \frac{C_0\tau}{1-(1+\tau)^{-n}}$.

Emprunts à annuités constantes

Emprunt à annuités constantes

Les annuités sont constantes : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour un certain a.

Proposition

Pour un emprunt à annuités constantes, on a :

1. *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *:*
$$m_{k+1} = m_k(1+\tau)\,;$$
2. $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$;
3. $a = a_k = \frac{C_0\tau}{1-(1+\tau)^{-n}}$.

Remarque

$m_1, \ldots, m_n$ sont les n premiers termes de la suite géométrique de raison $(1+\tau)$ et de premier terme $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$. En particulier, les amortissements sont croissants.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de $0,2\%$, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de $0,2\%$, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de $0,2\%$, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1 - (1+\tau)^{-n}}$$

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de $0,2\%$, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$1050,09 = a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1 - (1+\tau)^{-n}} = \frac{C_0 \times 0,002}{1 - 1,002^{-240}} = C_0 \times \frac{0,002}{1 - 1,002^{-240}}$$

puisque $20 \times 12 = 240$ mensualités seront versées.

Emprunts à annuités constantes - un exemple

Un emprunt sur 20 ans, au taux mensuel de $0,2\%$, est remboursable par le versement de mensualités constantes de 1050,09€.

But : Déterminer le capital emprunté.

On a :

$$1050,09 = a = a_k = \frac{C_0 \tau}{1-(1+\tau)^{-n}} = \frac{C_0 \times 0,002}{1-1,002^{-240}} = C_0 \times \frac{0,002}{1-1,002^{-240}}$$

puisque $20 \times 12 = 240$ mensualités seront versées.
Le capital emprunté est donc :

$$C_0 = 1050,09 \times \frac{1-1,002^{-240}}{0,002} \simeq 200000,10€.$$