Chapitre 3: Algèbre matricielle et systèmes linéaires

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2022-2023
Semestre 1

Exemple introductif

Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 en utilisant trois matières premières M_1, M_2 et M_3. Plus précisément, la production

- d'une unité de P_1 nécessite

  2Kg de M_1 1Kg de M_2 3Kg de M_3
- d'une unité de P_2 nécessite

  8Kg de M_1 4Kg de M_2 4Kg de M_3
- d'une unité de P_3 nécessite

  12Kg de M_1 8Kg de M_2 2Kg de M_3

Exemple introductif

Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 en utilisant trois matières premières M_1, M_2 et M_3. Plus précisément, la production

- d'une unité de P_1 nécessite

  2Kg de M_1 1Kg de M_2 3Kg de M_3

- d'une unité de P_2 nécessite

  8Kg de M_1 4Kg de M_2 4Kg de M_3

- d'une unité de P_3 nécessite

  12Kg de M_1 8Kg de M_2 2Kg de M_3

Notations :

- x_i la quantité de P_i produite, $i = 1, 2, 3$
- y_i la quantité de M_i consommée, $i = 1, 2, 3$

Questions :

- Connaissant les quantités à produire x_i, quelles sont les quantités de ressources y_i nécessaires ?
- Connaissant les stocks de ressources y_i disponibles, peut-on trouver un programme de production les épuisant ?

Mise en équations

Production

- d'une unité de P_1 nécessite
  2Kg de M_1 1Kg de M_2 3Kg de M_3
- d'une unité de P_2 nécessite
  8Kg de M_1 4Kg de M_2 4Kg de M_3
- d'une unité de P_3 nécessite
  12Kg de M_1 8Kg de M_2 2Kg de M_3

On écrit une équation par ressource et non par produit fini

- Équation pour la ressource M_1 :

$$2x_1 + 8x_2 + 12x_3 = y_1$$

- Équation pour la ressource M_2 :

$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 = y_2$$

- Équation pour la ressource M_3 :

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = y_3$$

Résumés de cette modélisation

Système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1 & +8x_2 & +12x_3 & = y_1 \\ x_1 & +4x_2 & +8x_3 & = y_2 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = y_3 \end{cases}$$

Écriture matricielle $AX = Y$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque

- *Si x_1, x_2 et x_3 sont connus, il est facile de trouver y_1, y_2 et y_3*
- *Si y_1, y_2 et y_3 sont connus, il est plus délicat x_1, x_2 et x_3*

Matrices

Définition

On appelle matrice de taille $m \times n$ un tableau de nombres réels constitué de m lignes et n colonnes.

Notations

1. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$: *l'ensemble des matrices de taille $m \times n$*
2. $a_{i,j}$: *le coefficient situé sur la i^e ligne et dans la j^e colonne de la matrice A*

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.

1. *Si $m = 1$, A est appelée vecteur ligne.*
2. *Si $n = 1$, A est appelée vecteur colonne.*
3. *Si $m = n$, A est appelée matrice carrée d'ordre n.*

Quelques matrices particulières

Définition

On considère des matrices carrées.

1. *D est dite diagonale si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$. Si de plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} = 1$, la matrice A est appelée matrice identité d'ordre n et est notée I_n.*
2. *U est dite triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i > j$.*
3. *L est dite triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i < j$.*

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Somme et différence

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.
La somme $A + B$ (resp. différence $A - B$) de A et de B est la matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $a_{i,j} + b_{i,j}$ (resp. $a_{i,j} - b_{i,j}$).

Exemple

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+4 & 4+1 \\ 2+2 & 5+4 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-4 & 4-1 \\ 2-2 & 5-4 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

Proposition

1. *Associativité :*
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
On notera simplement cette somme $A+B+C$.
2. *Commutativité :*
$$A+B = B+A$$
3. *Élément neutre :*
$$A+\mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n}+A = A$$
où $\mathbf{0}_{m,n}$ désigne la matrice $n \times n$ ne contenant que des 0.

Calcul matriciel

Transposition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.
On appelle transposée de A la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ telle que pour tous i, j, $b_{i,j} = a_{j,i}$. Cette matrice est notée ${}^t A$ ou A^T.

Exemple

La transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

est la matrice

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
Le produit αA est la matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $\alpha a_{i,j}$.

Exemple

On a :

$$7 \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 14 & 35 \end{pmatrix}.$$

Proposition

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Calcul matriciel

Multiplication matricielle

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
On appelle produit de A par B la matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Cette matrice est notée AB ou $A \times B$.

Remarque

Pour que le produit AB soit défini, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite.

Calcul matriciel

Exemple

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Présentation pratique

$$\begin{array}{c|l} & Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \hline X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = XY = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X = & \begin{pmatrix} 1 & \quad 2 \end{pmatrix} \\ \hline Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 4 \times 1 & 4 \times 2 \end{pmatrix} = YX = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul matriciel

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 & 3 \times 0 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 & 3 \times 0 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 2 + 0 \times 4 \\ 1 \times 1 + (-1) \times 3 & 1 \times 2 + (-1) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Calcul matriciel

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 & 3 \times 0 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 2 + 0 \times 4 \\ 1 \times 1 + (-1) \times 3 & 1 \times 2 + (-1) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

CB n'est pas défini mais le produit BC l'est et vaut :

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

Proposition

1. *Le produit matriciel* **n'est pas commutatif***, c'est-à-dire qu'en général* $AB \neq BA$.
2. *Élément neutre du produit matriciel dans* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ *:* I_n

$$AI_n = I_nA = A.$$

3. *Lorsque toutes les opérations sont définies, on a*

$$(AB)C = A(BC) =: ABC$$

et

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

Notations

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Calcul matriciel

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ *une matrice carrée.*
Sous réserve d'existence, on appelle inverse de A *la matrice* B *telle que* $AB = BA = I_n$. *Si elle existe, cette matrice est notée* A^{-1}.

Remarque

- *Il suffit que l'une des identités* $AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$ *soit vérifiée pour pouvoir affirmer que* $B = A^{-1}$.
- *Lorsque* A^{-1} *existe, ceci permet d'écrire*

$$AX = Y \Longleftrightarrow X = A^{-1}Y$$

et donc de répondre à la deuxième question de l'Exemple introductif.

Calcul matriciel

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times (-1) + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = I_2.$$

La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est, quant à elle, pas inversible. Ceci se vérifie par l'absurde.

Résolution de systèmes - un cas simple

Exemple

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 17 \\ & x_2 & +2x_3 & = 4 \\ & & x_3 & = 1 \end{cases}.$$

Ligne 3 :

$$x_3 = 1$$

En remontant l'information Ligne 2 :

$$x_2 + 2x_3 = 4 \Leftrightarrow x_2 + 2 \times 1 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 \times 1 = 2$$

Puis avec la Ligne 3 :

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17 \Leftrightarrow x_1 = 17 - 4x_2 - 6x_3 = 17 - 4 \times 2 - 6 \times 1 = 3$$

Ainsi, la solution de ce système est $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ *et* $x_3 = 1$

Résolution de système - une idée

Transformer un système
en un système équivalent qui soit triangulaire avec des 1 sur la diagonale

Opérations autorisées (sur les lignes)

1. intervertion de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$)
2. multiplication ou division d'une ligne par un réel non nul ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $L_i \leftarrow L_i/\alpha$)
3. ajout du produit d'un réel et d'une ligne à une **autre** ligne ($L_i \leftarrow L_i \pm \alpha L_j$, $i \neq j$)

Remarque

- *les opérations sur les lignes s'entendent sur l'intégralité de la ligne (membre de droite y compris)*
- *seules les opérations ci-dessus doivent être employées au risque de transformer un système en un système qui ne lui est pas équivalent !*

Résolution de système - suivons l'idée : méthode de Gauss

Méthode de Gauss - Phase de réduction

Pour i variant de 1 à n :

1. Si $a_{i,i} = 0$, réaliser $L_i \leftrightarrow L_j$ pour un $j > i$ tel que $a_{j,i} \neq 0$
   si pas possible, STOP $\rightsquigarrow$ le système n'admet pas une unique solution
2. $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}} L_i$
3. Pour j variant de $i+1$ à n faire $L_j \leftarrow L_j - a_{j,i} L_i$

Méthode de Gauss - Phase de remontée

Affecter à x_n la valeur b_n.
Pour i descendant de $n-1$ à 1 :

1. Remplacer $x_{i+1}, \ldots, x_n$ par leurs valeurs déjà trouvées dans L_i.
2. Résoudre en x_i l'équation du premier degré apparaissant dans la ligne L_i.

Sortie : $x_1, \ldots, x_n$ solution du système.

Résolution de système - la méthode de Gauss en action

Reprenons le système de l'Exemple introductif en supposant disposer en stock de

$$34\text{Kg de } M_1,\ 19\text{Kg de } M_2 \text{ et } 19\text{Kg de } M_3.$$

On doit donc résoudre le système d'écriture matricielle $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Présentation pratique : des tableaux

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 12 & 34 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}.$$

Résolution de système - la méthode de Gauss en action

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 12 & 34 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 1 L_1 = L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3 L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{-8} L_2 = -\frac{1}{8} L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 17 \\ & x_2 & +2x_3 & = 4 \\ & & x_3 & = 1 \end{array}\right.$$

Par remontée : $x_3 = 1$
Puis : $x_2 = 2$
Puis : $x_1 = 3$

Ainsi, la solution de ce système est

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Résolution de système - la méthode de Gauss-Jordan

Idée : même type de démarche mais on veut avoir à la fin

- l'identité à gauche
- la solution à droite

Méthode de Gauss-Jordan

Pour i variant de 1 à n :

1. Si $a_{i,i} = 0$, réaliser $L_i \leftrightarrow L_j$ pour un $j > i$ tel que $a_{j,i} \neq 0$
   si pas possible, STOP $\rightsquigarrow$ le système n'admet pas une unique solution
2. $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}} L_i$
3. Pour $j \neq i$ faire $L_j \leftarrow L_j - a_{j,i} L_i$

Résolution de système - la méthode de Gauss-Jordan en action

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 12 & 34 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - (-2)L_3 = L_1 + 2L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Solution :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss-Jordan pour l'inversion de matrices

Même démarche en partant de $A|I_n$ et en terminant avec $I_n|A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AX = \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$