IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GCF 24
2018-2019, S3

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 : On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I}) \begin{cases} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ & x_1 \leq 100 \\ & x_2 \leq 75 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives e_1, e_2, e_3 et e_4, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S}) \begin{cases} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & x_1 + 2x_2 - e_1 = 50 \\ & x_1 + e_2 = 100 \\ & x_2 + e_3 = 75 \\ & 4x_1 + 5x_2 + e_4 = 600 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases} .$$

La première contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de e_1 comme variable de base conduirait à une contradiction (e_1 serait négatif). On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.

Après l'introduction d'une variable artificielle w_1 et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A}) \begin{cases} \text{minimiser} & W = w_1 \\ \text{sous} & x_1 + 2x_2 - e_1 + w_1 = 50 \\ & x_1 + e_2 = 100 \\ & x_2 + e_3 = 75 \\ & 4x_1 + 5x_2 + e_4 = 600 \\ & 2x_1 + 3x_2 - z = 0 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, w_1 \geq 0 \end{cases} .$$

2. **Phase I :** Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I (avec présentation en tableaux) avec pour variables de base initiales w_1, e_2, e_3 et e_4. Le premier tableau est le suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
w_1	1	2	-1	0	0	0	1	0	0	50
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	75
e_4	4	5	0	0	0	1	0	0	0	600
$-z$	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

On exprime l'objectif artificiel W en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de w_1 dans la ligne de $-W$ par l'opération $L_6 \leftarrow L_6 - L_1$. On obtient le tableau :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
w_1	1	2	-1	0	0	0	1	0	0	50
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	75
e_4	4	5	0	0	0	1	0	0	0	600
$-z$	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-1	-2	1	0	0	0	0	0	1	-50

Nous traitons un problème de minimisation de W et la ligne de $-W$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-W$ soit le "plus négatif" possible. Nous choisissons donc de faire entrer x_2 dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_2 dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— 25 pour w_1,
— ∞ pour e_2,
— 75 pour e_3,
— 120 pour e_4.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire w_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_2 et x_2 et des 0 dans le reste de la colonne de x_2. On commence par réaliser l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$:

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	25
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	75
e_4	4	5	0	0	0	1	0	0	0	600
$-z$	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-1	-2	1	0	0	0	0	0	1	-50

En effectuant les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1$ et $L_6 \leftarrow L_6 + 2L_1$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	25
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\star$	0	0	50
e_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\star$	0	0	475
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\star$	1	0	-75
$-w$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-w$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour ($\mathrm{P_S}$) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 100 \\ 50 \\ 475 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de z.

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	25
e_2	1	0	0	1	0	0	0	100
e_3	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	50
e_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	1	0	475
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	1	-75

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de e_1. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de e_1 dans les lignes 1 à 4. On obtient :
— -50 pour x_2,
— ∞ pour e_2,
— 100 pour e_3,
— 190 pour e_4.
On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici e_3. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par e_1 et e_1 puis des 0 dans le reste de la colonne de e_1. On réalise l'opération $L_3 \leftarrow 2L_3$:

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	25
e_2	1	0	0	1	0	0	0	100
e_1	-1	0	1	0	2	0	0	100
e_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	1	0	475
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	1	-75

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{2}L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 - \frac{3}{2}L_3$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_2	0	1	0	0	1	0	0	75
e_2	1	0	0	1	0	0	0	100
e_1	-1	0	1	0	2	0	0	100
e_4	4	0	0	0	-5	1	0	225
$-z$	2	0	0	0	-3	0	1	-225

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de x_1. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_1 dans les lignes 1 à 4. On obtient :

- ∞ pour x_2,
- 100 pour e_2,
- -100 pour e_1,
- $\frac{225}{4} < 100$ pour e_4.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici e_4. On effectue $L_4 \leftarrow L_4/4$ pour mettre un 1 dans la case repérée par x_1 et x_1 avant de mettre des 0 dans le reste de la colonne de x_1.

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_2	0	1	0	0	1	0	0	75
e_2	1	0	0	1	0	0	0	100
e_1	-1	0	1	0	2	0	0	100
x_1	1	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{225}{4}$
$-z$	2	0	0	0	-3	0	1	-225

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$ et $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_4$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_2	0	1	0	0	1	0	0	75
e_2	0	0	0	1	$\frac{5}{4}$	-1	0	$\frac{175}{4}$
e_1	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{625}{4}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{225}{4}$
$-z$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{675}{2}$

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = \frac{675}{2}$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{225}{4}, 75)$.

Exercice 2 :

1. (a) **Définition des variables :** Pour $i = 1, 2$, on note x_i la quantité de M_i produite en une semaine, exprimée en HL.

   (b) **Définition de l'objectif :** L'industriel souhaite maximiser sa marge hebdomadaire brute :

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

   exprimée en milliers d'euros.

(c) **Définition des contraintes :**

i. Contrainte liée à l'emploi d'au moins 10 salariés :
Puisque la fabrication d'un HL de M_1 nécessite 7h de main d'oeuvre et est deux fois plus courte que celle d'un HL de M_2, on obtient que la fabrication d'un HL de M_2 nécessite 14h de main d'oeuvre. Pour employer au moins 10 salariés à temps complet pour la fabrication de ces produits, il faut donc que :

$$7x_1 + 14x_2 \geq 350$$

soit,

$$x_1 + 2x_2 \geq 50.$$

ii. Contrainte à la cuve contenant le M_1 :

$$x_1 \leq 100.$$

iii. Contrainte à la cuve contenant le M_2 :

$$x_2 \leq 75.$$

iv. Contrainte liée à la première machine :

$$4x_1 + 5x_2 \leq 600.$$

v. Contrainte liée à la seconde machine :

$$10x_1 + 10x_2 \leq 3000$$

soit,

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

vi. Contraintes de "bon sens" :

$$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$

que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

(d) **Formulation du problème :**

$$(\mathrm{P_{II}}) \begin{cases} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ & x_1 \leq 100 \\ & x_2 \leq 75 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ & x_1 + x_2 \leq 300 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

(e) On remarque que ce problème est très similaire au problème $(\mathrm{P_I})$ de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $x_1 + x_2 \leq 300$ présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$.

2. La contrainte présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$ n'est pas saturée et satisfaite par la solution optimale de $(\mathrm{P_I})$: $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{225}{4}, 75)$ $(\frac{225}{4} + 75 = \frac{525}{4} < 300)$. On en déduit qu'une solution optimale de $(\mathrm{P_{II}})$ est

$$z^* = \frac{675}{2} = 337,5$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{225}{4}, 75) = (56,25, 75)$. Le créateur maximisera sa marge hebdomadaire brute en produisant 5625L de M_1 et 75HL de M_2 dans la semaine. Sa marge hebdomadaire brute sera alors de 337500€.