IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GMO 23
2018-2019, S3

Correction du Contrôle Continu n^o 1

Exercice 1 : On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & 3x_1 + x_2 \geq 90 \\ & x_1 \leq 100 \\ & x_2 \leq 150 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 210 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. .$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives e_1, e_2, e_3 et e_4, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & 3x_1 + x_2 - e_1 = 90 \\ & x_1 + e_2 = 100 \\ & x_2 + e_3 = 150 \\ & 2x_1 + x_2 + e_4 = 210 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{array}\right. .$$

La première contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de e_1 comme variable de base conduirait à une contradiction (e_1 serait négatif). On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.

Après l'introduction d'une variable artificielle w_1 et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A})\left\{\begin{array}{ll} \text{minimiser} & W = w_1 \\ \text{sous} & 3x_1 + x_2 - e_1 + w_1 = 90 \\ & x_1 + e_2 = 100 \\ & x_2 + e_3 = 150 \\ & 2x_1 + x_2 + e_4 = 210 \\ & 8x_1 + 3x_2 - z = 0 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, w_1 \geq 0 \end{array}\right. .$$

2. **Phase I :** Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I (avec présentation en tableaux) avec pour variables de base initiales w_1, e_2, e_3 et e_4. Le premier tableau est le suivant :

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
w_1	3	1	-1	0	0	0	1	0	0	90
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	150
e_4	2	1	0	0	0	1	0	0	0	210
$-z$	8	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

On exprime l'objectif artificiel W en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de w_1 dans la ligne de $-W$ par l'opération $L_6 \leftarrow L_6 - L_1$. On obtient le tableau :

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
w_1	3	1	-1	0	0	0	1	0	0	90
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	150
e_4	2	1	0	0	0	1	0	0	0	210
$-z$	8	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-3	-1	1	0	0	0	0	0	1	-90

Nous traitons un problème de minimisation de W et la ligne de $-W$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-W$ soit le "plus négatif" possible. Nous choisissons donc de faire entrer x_1 dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_1 dans les lignes 1 à 4. On obtient :
- 30 pour w_1,
- 100 pour e_2,
- ∞ pour e_3,
- 105 pour e_4.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire w_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_1 et x_1 et des 0 dans le reste de la colonne de x_1. On commence par réaliser l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$:

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	30
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	100
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	150
e_4	2	1	0	0	0	1	0	0	0	210
$-z$	8	3	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-3	-1	1	0	0	0	0	0	1	-90

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - 8L_1$ et $L_6 \leftarrow L_6 + 3L_1$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	w_1	$-z$	$-W$	b
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	30
e_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\star$	0	0	70
e_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	150
e_4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\star$	0	0	150
$-z$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	0	0	$\star$	1	0	-240
$-w$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-w$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour ($\mathrm{P_S}$) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 70 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de z.

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	30
e_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	70
e_3	0	1	0	0	1	0	0	150
e_4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	150
$-z$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	0	0	1	-240

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de e_1. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de e_1 dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— -90 pour x_1,
— 210 pour e_2,
— ∞ pour e_3,
— 225 pour e_4.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici e_2. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par e_1 et e_1 puis des 0 dans le reste de la colonne de e_1. On réalise l'opération $L_2 \leftarrow 3L_2$:

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	30
e_1	0	-1	1	3	0	0	0	210
e_3	0	1	0	0	1	0	0	150
e_4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	150
$-z$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	0	0	1	-240

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_2$ et $L_5 \leftarrow L_5 - \frac{8}{3}L_2$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_1	1	0	0	1	0	0	0	100
e_1	0	-1	1	3	0	0	0	210
e_3	0	1	0	0	1	0	0	150
e_4	0	1	0	-2	0	1	0	10
$-z$	0	3	0	-8	0	0	1	-800

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de x_2. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de e_1 dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— ∞ pour x_1,
— -210 pour e_1,
— 150 pour e_3,
— 10 pour e_4.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici e_4. Il y a déjà un 1 dans la case repérée par x_2 et x_2 et on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ et $L_5 \leftarrow L_5 - 3L_4$ pour obtenir :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	$-z$	b
x_1	1	0	0	1	0	0	0	100
e_1	0	0	1	$\star$	0	$\star$	0	220
e_3	0	0	0	$\star$	1	$\star$	0	140
x_2	0	1	0	-2	0	1	0	10
$-z$	0	0	0	-2	0	-3	1	-830

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = 830$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (100, 10)$.

Exercice 2 :

1. (a) **Définition des variables :**Notons x_1 le nombre de tables produites par l'artisan en un mois et x_2 le nombre de chaises produites par l'artisan en un mois.

   (b) **Définition de l'objectif :** L'artisan souhaite maximiser son bénéfice net mensuel :

   $$z = 8x_1 + 3x_2$$

   exprimée en dizaines euros.

   (c) **Définition des contraintes :**

      i. Contrainte liée au temps de travail de l'ébéniste :

      $$x_1 + x_2 \leq 150.$$

      ii. Contrainte liée au temps de travail de ses apprentis :
      Un apprenti passe 15 heures sur la fabrication d'une table et trois fois moins de temps, soit 5h, sur la fabrication d'une chaise. Les apprentis devant travailler au moins 450h par mois, on obtient que :

      $$15x_1 + 5x_2 \geq 450,$$

      soit

      $$3x_1 + x_2 \geq 90.$$

      iii. Contraintes liées à la revente des tables et des chaises :

      $$x_1 \leq 100$$

      et

      $$x_2 \leq 150.$$

      iv. Contrainte liée à la quantité de bois disponible :

      $$2x_1 + 1x_2 \leq 210.$$

      v. Contraintes de "bon sens" :

      $$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$

      que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

   (d) **Formulation du problème :**

   $$(\mathrm{P_{II}}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{sous} & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + x_2 \geq 90 \\ & x_1 \leq 100 \\ & x_2 \leq 150 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 210 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

   (e) On remarque que ce problème est très similaire au problème $(\mathrm{P_I})$ de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $x_1 + x_2 \leq 150$ présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$.

2. La contrainte présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$ n'est pas saturée et satisfaite par la solution optimale de $(\mathrm{P_I})$: $(x_1^*, x_2^*) = (100, 10)$ $(100 + 10 = 110 < 150)$. On en déduit qu'une solution optimale de $(\mathrm{P_{II}})$ est

   $$z^* = 830$$

   atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (100, 10)$. L'artisan maximisera son bénéfice net mensuel en produisant 100 tables et 10 chaises dans le mois. Son bénéfice net sera alors de 8300€.