

## Compléments autour de la Leçon 29

### 1 Autour de la bonne définition d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

#### Exercice 1

Donner un exemple de fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I \subset \mathbf{R}$ , continue sur  $I$  telle que pour toute condition initiale  $u_0 \in I$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ne soit pas bien définie.

#### Exercice 2

Soient  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I \subset \mathbf{R}$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par la donnée de  $u_0 \in I$  et la relation récurrente d'ordre 1 :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $J$  de  $I$  stable par  $f$ , c'est-à-dire tel que  $f(J) \subset J$ . Montrer que pour toute condition initiale  $u_0 \in J$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bien définie et vérifie  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset J$ .
2. Est-il nécessaire que  $f$  soit continue sur  $I$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  soit bien définie ?
3. Que pensez-vous du cas où  $I = \mathbf{R}$  ?

### 2 Autour des variations

#### Exercice 3

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  avec  $I \subset \mathbf{R}$  stable par  $f$ . Soit aussi  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in I$  et la relation de récurrence d'ordre 1  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Supposons que  $f$  soit croissante sur  $I$ . Caractériser la monotonie  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  en fonction du signe de  $f(u_0) - u_0$ .
2. Supposons que  $f$  soit décroissante sur  $I$ . Montrer que les sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont monotones, l'une croissante, l'autre décroissante.
3. Donner une condition suffisante sur  $f$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  soit croissante pour toute condition initiale  $u_0 \in I$ .

### 3 Autour du comportement asymptotique

#### Exercice 4

Donner un exemple de fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , telle que selon la condition initiale choisie la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  soit convergente ou admette deux valeurs d'adhérence distinctes.

#### Exercice 5

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue telle que  $[a, b]$  soit stable par  $f$ . Soit aussi  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in [a, b]$  et la relation de récurrence d'ordre 1  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $l \in \mathbf{R}$  alors  $l$  est nécessairement un point fixe de  $f$  et appartient à  $[a, b]$ .

#### Exercice 6

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  admettant un point fixe dans  $[a, b]$  et contractante, c'est-à-dire  $k$ -lipshitzienne pour un  $k \in ]0, 1[$ . Soit aussi  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in [a, b]$  et la relation de récurrence d'ordre 1  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. La fonction  $f$  est-elle continue ?
2. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $l$ .
3. Montrer que, pour toute condition initiale  $u_0 \in [a, b]$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $l$  et donner un majorant de  $|u_n - l|$  en fonction de  $a, b, k$  et  $n$ .

### Exercice 7

Soient  $a > 0$ ,  $f$  définie sur  $\mathbf{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$  et  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite récurrente d'ordre 1 définie par la donnée de  $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Cette suite correspond au procédé connu sous le nom de *méthode de Héron* pour l'approximation de  $\sqrt{a}$ .

1. Montrer que  $\mathbf{R}_+^*$  est stable par  $f$ .
2. Montrer que  $f$  admet  $\sqrt{a}$  pour unique point fixe dans  $\mathbf{R}_+^*$ .
3. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  si  $u_0 = \sqrt{a}$ ?
4. Montrer que si  $u_0 \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{\sqrt{a}\}$  alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n > \sqrt{a}$ .
5. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante à partir du rang 1.
6. Conclure quant à la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vers  $\sqrt{a}$ .
7. Proposer une autre suite récurrente d'ordre 1 (issue d'une méthode classique) permettant de déterminer une valeur approchée de  $\sqrt{a}$ .

## 4 Suites arithmético-géométriques

### Exercice 8

Soient  $a, b \in \mathbf{R}$ . Considérons la suite arithmético-géométrique  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par la donnée de  $u_0 \in \mathbf{R}$  et l'expression récurrente :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier  $a = 1$ ?
2. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier  $b = 0$ ?
3. Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  le cas particulier  $a = 0$ ?
4. On suppose pour la suite de cet exercice que  $a \neq 1$ . Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = ax + b$  admet un unique point fixe  $\alpha$ .
5. Étudier la nature de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $v_n = u_n - \alpha$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .
6. En déduire une expression close pour  $u_n$  puis pour  $\sum_{k=0}^n u_k$ .
7. Discuter du comportement asymptotique de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  en fonction de  $a$ .

## 5 Suites homographiques dans $\mathbf{C}$

### Exercice 9

Soient  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  tels que  $ad - bc \neq 0$ . Considérons la suite homographique  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par la donnée de  $u_0 \in \mathbf{C}$  et l'expression récurrente :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

1. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier  $c = 0$ ?
2. Supposons maintenant que  $c \neq 0$  et définissons  $f : \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbf{C}$  par :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- (a) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est-elle bien définie dans tous les cas?
- (b) On suppose pour la suite de cet exercice que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bien définie.
  - i. Montrer que  $f$  admet soit un soit deux points fixes dans  $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ .
  - ii. Montrer que  $f$  est injective.
  - iii. Montrer que si  $z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  alors  $f(z)$  n'est pas un point fixe de  $f$  non plus.
  - iv. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  si  $u_0$  est un point fixe de  $f$ ?
- (c) On suppose que  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$  et  $\beta$  et que  $u_0 \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}, \alpha\}$ .

- i. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{C} \setminus \{\alpha\}$ .
- ii. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}, \quad n \in \mathbf{N},$$

est arithmétique et préciser sa raison.

(d) On suppose maintenant que  $f$  admet deux points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  et que  $u_0 \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}, \alpha, \beta\}$ .

- i. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$ .
- ii. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}, \quad n \in \mathbf{N},$$

est géométrique et préciser sa raison.

## 6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et suite de Fibonacci

### Exercice 10

On considère les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire les suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définies par la donnée de  $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$  et pour  $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$  la relation :

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on note :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  satisfait une expression récurrente linéaire matricielle d'ordre 1  $U_{n+1} = AU_n$  et expliciter la matrice  $A$ .
2. En déduire une relation close pour  $U_n$  en fonction de  $U_0$  et  $A$ .
3. Rappeler une condition suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.
4. On considère maintenant le cas particulier  $a_1 = a_2 = 1$  et  $(u_0, u_1) = (0, 1)$  correspondant à la suite de Fibonacci.
  - (a) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de  $A$  dans ce cas.
  - (b) Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
  - (c) Déduire de ce qui précède la *formule de Binet* affirmant que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  le terme d'ordre  $n$  de la suite de Fibonacci est donné par :

$$\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

## 7 Exercice de bac Terminale Spécialité (Polynésie 2022 sujet 1)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. (a) Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
- (b) Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel  $k$  et renvoie la liste des premières valeurs de la suite  $(u_n)$  de  $u_0$  à  $u_k$ .

1.	<code>def liste(k) :</code>
2.	<code>  L = []</code>
3.	<code>  u = ...</code>
4.	<code>  for i in range(0, k+1) :</code>
5.	<code>    L.append(u)</code>
6.	<code>    u = ...</code>
7.	<code>  return(L)</code>

2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. (a) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
(b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.