

Correction du Contrôle Continu

Question de cours :

On appelle *taux de rentabilité interne (TRI)* d'un investissement le taux d'actualisation annulant la valeur actuelle nette de celui-ci. Si le montant de l'investissement est I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie r_k en fin de k^e année, le taux de rentabilité interne TRI de l'investissement est solution de l'équation :

$$-I + \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{(1 + \text{TRI})^k} = 0.$$

Exercice 1 :

1. Les intérêts étant capitalisés 52 fois par an, le taux périodique du livret est donné par :

$$\tau_{\text{pér}} = \frac{\tau_{\text{nom}}}{52} = \frac{0,05}{52} \simeq 0,1\%$$

et son taux annuel effectif par :

$$\tau_{\text{eff}} = (1 + \tau_{\text{pér}})^{52} - 1 = \left(1 + \frac{0,05}{52}\right)^{52} - 1 \simeq 5,1\%.$$

2. La valeur acquise C_2 au terme de 2 ans pour un placement de $C_0 = 1500\text{€}$ sur ce livret est :

$$C_2 = C_0 (1 + \tau_{\text{eff}})^2 = 1500 \left(\left(1 + \frac{0,05}{52}\right)^{52} \right)^2 = 1500 \left(1 + \frac{0,05}{52}\right)^{104} \simeq 1657,68.$$

Exercice 2 :

1. Notons τ_A (resp. τ_B) le TAEG du prêt proposé par la banque A (resp. B). Par définition, τ_A est solution de l'équation :

$$1833 = \frac{2000}{(1 + \tau_A)^2}.$$

On a donc

$$(1 + \tau_A)^2 = \frac{2000}{1833}$$

puis

$$\tau_A = \sqrt{\frac{2000}{1833}} - 1 \simeq 4,46\%.$$

Par définition, τ_B est solution de l'équation :

$$1833 = \frac{1000}{1 + \tau_B} + \frac{1000}{(1 + \tau_B)^2}.$$

Celle-ci se réécrit

$$1000 \left(\frac{1}{1 + \tau_B} \right)^2 + 1000 \frac{1}{1 + \tau_B} - 1833 = 0,$$

soit encore en posant $x = \frac{1}{1+\tau_B}$:

$$1000x^2 + 1000x - 1833 = 0.$$

Le discriminant du polynôme du second degré $1000x^2 + 1000x - 1833$ est $\Delta = 8332000$ et celui-ci admet pour racines :

$$x_1 = \frac{-1000 - \sqrt{8332000}}{2000} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1000 + \sqrt{8332000}}{2000}.$$

Remarquons que τ_B étant nécessairement positif $x = \frac{1}{1+\tau_B} > 0$ et que $x_1 < 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{1 + \tau_B} = x_2 (> 0)$$

et donc

$$\tau_B = \frac{1}{x_2} - 1 = \frac{2000}{-1000 + \sqrt{8332000}} - 1 \simeq 6\%.$$

2. La banque A propose un TAEG plus faible et est donc préférable.

Exercice 3 :

1. Puisqu'il s'agit d'un emprunt à annuités constantes, les amortissements m_k sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $1 + \tau$, où τ est le taux d'intérêt. Ici, on sait que $m_1 = 1200\text{€}$ et $m_4 = 1389,15\text{€}$. On en déduit que :

$$(1 + \tau)^3 = \frac{m_1 (1 + \tau)^3}{m_1} = \frac{m_4}{m_1} = \frac{1389,15}{1200}$$

puis que

$$\tau = \left(\frac{1389,15}{1200} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 5\%.$$

2. On sait que, dans le cadre d'un emprunt à annuités constantes, le montant du premier amortissement m_1 vérifie :

$$m_1 = \frac{C_0 \tau}{(1 + \tau)^n - 1}.$$

avec C_0 le montant du capital emprunté et n le nombre d'annuités. On en déduit que :

$$C_0 = m_1 \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau} = 1200 \frac{1,05^4 - 1}{0,05} \simeq 5172,15\text{€}.$$

3. Le capital restant dû après le paiement de l'avant dernière annuité est toujours égal au dernier amortissement. Il s'agit ici de $C_3 = m_4 = 1389,15\text{€}$.

Exercice 4 :

1. Puisque les 3 amortissements sont constants, on a :

$$3m_1 = m_1 + m_2 + m_3 = C_0$$

et donc :

$$m_1 = \frac{C_0}{3} = \frac{12000}{3} = 4000\text{€}$$

est le montant de l'amortissement constant.

2. Le tableau d'amortissement prend la forme suivante :

Période n°	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	12000	$12000 \times 0,025 = 300$	4000	$4000 + 300 = 4300$
2	$12000 - 4000 = 8000$	200	4000	4200
3	4000	100	4000	4100

Exercice 5 : On sait que :

$$\tau_{2015|2014} = 20\% = 0,2 \quad \text{et} \quad \tau_{2016|2015} = -20\% = -0,2$$

et donc

$$I_{2015|2014}^p = 1 + \tau_{2015|2014} = 1,2 \quad \text{et} \quad I_{2016|2015}^p = 1 + \tau_{2016|2015} = 0,8.$$

La règle de circularité des indices indique que :

$$I_{2016|2014}^p = I_{2016|2015}^p I_{2015|2014}^p = 0,8 \times 1,2 = 0,96.$$

On en déduit que :

$$\tau_{2016|2014} = I_{2016|2014}^p - 1 = -0,04 = -4\%.$$

Le prix du produit a diminué de 4% entre 2014 et 2016.