

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE  
UFR SCIENCES ET TECHNIQUES  
Année universitaire 2024-2025  
M2 MIGS & PMG

---

# MODÈLES ALÉATOIRES

MODÉLISATION AVEC DES LOIS EXPONENTIELLES, PROCESSUS DE POISSON

ARNAUD ROUSSELLE  
arnaud.rouselle@u-bourgogne.fr

---

## Préambule

Ces notes ont été rédigées en (grande) partie à partir de celle transmises par PEGGY CÉNAC que je remercie chaleureusement. Les commentaires et remontées de coquilles sont les biens venus.

## 1 Modélisation avec des lois exponentielles

### 1.1 Rappels sur les lois exponentielles

**Définition 1.** Soit  $\lambda > 0$ .

On dit qu'une v.a.  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si elle est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ ) et admet pour densité :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

**Remarque 1.** Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes *sans mémoire* ou *sans vieillissement*, ce qui est justifié par le deuxième point de la Proposition 1. On peut notamment penser au temps d'attente avant le prochain tremblement de terre, la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire, l'obtention d'un CDI par un jeune diplômé ou encore à la durée de vie de certains appareils comme des ampoules ou des batteries.

**Proposition 1.** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

1. La fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

et sa queue de distribution par :

$$R_X(x) := \mathbf{P}[X > x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

2. [Absence de mémoire] Pour tous  $s, t \geq 0$  :

$$\mathbf{P}[X > s + t | X > t] = \mathbf{P}[X > s].$$

3. On a :

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbf{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$L_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{et} \quad \phi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - it},$$

où  $L_X$  et  $\phi_X$  désignent respectivement la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique de  $X$ .

**Remarque 2.** L'absence mémoire (point 2) s'interprète comme suit. Si  $X$  représente la durée de vie d'un système, elle revient au fait que le système ne vieillit pas.

**Preuve du point 2. :** On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X > s+t | X > t] &= \frac{\mathbf{P}[X > s+t, X > t]}{\mathbf{P}[X > t]} = \frac{\mathbf{P}[X > s+t]}{\mathbf{P}[X > t]} \\ &= \frac{1 - \mathbf{P}[X \leq s+t]}{1 - \mathbf{P}[X \leq t]} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} = 1 - F_X(s) = \mathbf{P}[X > s]. \end{aligned}$$

□

**Exemple 1.** On a observé que la durée de vie d'une ampoule d'un modèle donné est d'en moyenne 1000 heures. Considérons une ampoule de ce modèle et intéressons nous à sa durée de vie  $X$  (exprimée en heures). La v.a.  $X$  est continue et sans mémoire. On considère donc que  $X$  suit une loi exponentielle. Puisque l'on s'attend à avoir une durée de vie moyenne de 1000 heures, le paramètre de cette loi exponentielle est  $\lambda = \frac{1}{1000}$  de sorte que  $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 1000$ .

Ainsi, la probabilité pour que l'ampoule fonctionne au plus 100h est :

$$\mathbf{P}[X \leq 100] = 1 - e^{-\frac{1}{1000} \times 100} = 1 - e^{-\frac{1}{10}} \simeq 0,01.$$

De même, la probabilité pour que l'ampoule fonctionne plus de 4500 heures est :

$$\mathbf{P}[X > 4500] = 1 - \mathbf{P}[X \leq 4500] = e^{-\frac{1}{1000} \times 4500} = 1 - e^{-4,5} \simeq 0,01.$$

## 1.2 Loi exponentielle : une loi limite

**Proposition 2.** Soit  $(p_n)_{n \geq 1} \subset ]0, 1[$  telle que  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$ . Soient  $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ .

Alors, la suite  $(X_n/n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une v.a. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

**Preuve :** Rappelons que la fonction caractéristique de la loi géométrique  $\mathcal{G}(p_n)$  est donnée par

$$\phi_{X_n}(t) = \frac{p_n e^{it}}{1 - (1 - p_n)e^{it}}.$$

Il suffit alors d'écrire que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{X_n}{n}}(t) &= \phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \frac{p_n e^{i\frac{t}{n}}}{1 - (1 - p_n)e^{i\frac{t}{n}}} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p_n \left(1 + \frac{it}{n}\right)}{1 - (1 - p_n) \left(1 + \frac{it}{n}\right)} \\ &= \frac{p_n (n + it)}{n - (1 - p_n)(n + it)} \\ &= \frac{np_n + itp_n}{n - n + np_n - it + itp_n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - it} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$  et donc  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . □

**Remarque 3.**

On n'a pas supposé l'indépendance des  $X_n$ .

**1.3 Retour sur l'absence de mémoire**

On a déjà vu qu'une variable aléatoire exponentielle vérifie la propriété d'*absence de mémoire* (ou *absence de vieillissement*) : pour tous  $x, y \geq 0$  :

$$\mathbf{P}[X > x + y | X > y] = \mathbf{P}[X > x].$$

Le théorème suivant montre en particulier que, parmi les v.a. absolument continues à valeurs positives et de support  $\mathbf{R}_+$ , se sont les seules.

**Théorème 1.** *Soit  $X$  une v.a. absolument continue à valeurs positive vérifiant :*

$$\mathbf{P}[X > 0] > 0.$$

*Si  $X$  est sans mémoire, alors  $X$  suit une loi exponentielle.*

**Preuve :** Dénotons par  $R$  la queue de distribution de  $X$  :

$$\forall x \in \mathbf{R}, R(x) = \mathbf{P}[X > x].$$

On a que :

$$\begin{aligned} \forall x, y \geq 0, \mathbf{P}[X > x + y | X > y] &= \mathbf{P}[X > x] \\ \iff \forall x, y \geq 0, \mathbf{P}[X > x + y, X > y] &= \mathbf{P}[X > x] \mathbf{P}[X > y] \\ \iff \forall x, y \geq 0, R(x + y) &= R(x) R(y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

En considérant le cas  $x = y = 0$ , il vient que  $R(0) = 0$  ou 1. Mais, par hypothèse,  $R(0) = \mathbf{P}[X > 0] > 0$ . Par décroissance de  $R$ , on obtient de  $R(x) = 1$  pour tout  $x \leq 0$ . Comme  $R$  est continue comme queue de distribution d'une v.a. absolument continue, il vient de l'équation fonctionnelle caractérisant l'exponentielle et de (1.1), que sa restriction à  $\mathbf{R}_+$  est de la forme  $R(x) = e^{\alpha x}$ , pour un certain  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Comme  $R$  est décroissante et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$  (c'est la queue de distribution d'une v.a.r.), il vient que  $\alpha < 0$ . On reconnaît alors qu'il s'agit de la queue de distribution d'une v.a. exponentielle. □

**Exercice 1.** Dans le cas discret, caractériser les v.a. sans mémoire dont le support est  $\mathbf{N}^*$ , puis celles dont le support est  $\mathbf{N}$ .

**1.4 Liens avec d'autres lois**

**1.4.1 Loi de la partie entière inférieure**

**Proposition 3.** *Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .*

*Alors,*

$$\lfloor X \rfloor + 1 \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda}).$$

**Preuve :** Exercice (TD de L3). □

**1.4.2 Loi de la la somme de v.a.i.i.d. exponentielles**

**Définition 2.** Soit  $\lambda > 0$  et  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

On appelle distribution d'Erlang de paramètres  $\lambda$  et  $n$  la loi de

$$T_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

**Proposition 4.** Soit  $\lambda > 0$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Une densité de la loi d'Erlang de paramètres  $\lambda$  et  $n$  est donnée par :

$$x \mapsto \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

**Preuve :** Exercice (TD de L3). □

**Remarque 4.** La loi d'Erlang de paramètres  $\lambda$  et  $n$  n'est autre que la loi  $\Gamma(\lambda, n)$ .

**1.4.3 Comportement du maximum de v.a.i.i.d. exponentielles**

**Proposition 5.** Soit  $\lambda > 0$  et  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :

$$M_n := \max_{k=1}^n X_k.$$

Alors,  $(M_n/\ln(n))_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $\lambda^{-1}$  et  $(\lambda M_n - \ln(n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire de Gumbel (standard) c'est-à-dire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$x \mapsto e^{-e^{-x}}.$$

**Preuve :** Exercice (TD de L3). □

**1.5 Statistiques d'ordre**

Plaçons nous provisoirement dans un cadre plus général en considérant un  $n$ -uplet de v.a.r.i.i.d. continues.

**Proposition 6.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.i.i.d. de densité  $f$  sur  $\mathbf{R}$  et de fonction de répartition  $F$ .

Notons  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  le réarrangement croissant de  $X_1, \dots, X_n$ .

Alors,

1. une densité de  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto n! \mathbf{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n} \prod_{k=1}^n f(x_k);$$

2. pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X_{(k)}$  admet pour densité :

$$x \mapsto k \binom{n}{k} f(x) (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}.$$

Avant de démontrer cette proposition, établissons deux lemmes.

**Lemme 1.** *Dans les conditions de la Proposition 6, les  $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$  sont presque sûrement tous distincts.*

**Preuve :** Soient  $1 \leq j, k \leq n$ , avec  $j \neq k$ . On a en utilisant l'indépendance et l'identique distribution de  $X_j$  et  $X_k$  ainsi que le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_j = X_k] &= \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_{\{x\}}(y) f(x) f(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\{x\}}(y) f(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \int_{\{x\}} f(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \times 0 \, dx = 0 \quad (\text{puisque } \{x\} \text{ est de mesure de Lebesgue nulle}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq \mathbf{P}[\cup_{1 \leq j, k \leq n, j \neq k} \{X_j = X_k\}] \leq \sum_{1 \leq j, k \leq n, j \neq k} \mathbf{P}[X_j = X_k]$$

et le résultat est établi. □

Notons  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Grâce au lemme précédent, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , on peut définir une permutation  $\sigma(\omega)$  telle que :

$$X_{\sigma(\omega)(1)}(\omega) < X_{\sigma(\omega)(2)}(\omega) < \dots < X_{\sigma(\omega)(n)}(\omega).$$

Observons que  $\sigma$  est une variable aléatoire à valeur dans  $\mathfrak{S}_n$ . En effet, si  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , on a :

$$\sigma^{-1}(\{\tau\}) = \{\omega \in \Omega : X_{\tau(1)}(\omega) < X_{\tau(2)}(\omega) < \dots < X_{\tau(n)}(\omega)\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B_\tau\}$$

où  $B_\tau = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_{\tau(1)} < x_{\tau(2)} < \dots < x_{\tau(n)}\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ . On obtient donc que  $\sigma^{-1}(\{\tau\})$  est mesurable et ceci est suffisant puisque  $\mathfrak{S}_n$  est fini.

**Lemme 2.** *Dans les conditions de la Proposition 6 avec les notations précédentes,  $\sigma$  suit la loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_n$ .*

**Preuve :** Rappelons qu'une densité de  $(X_1, \dots, X_n)$  est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^n f(x_k)$$

puisque  $(X_1, \dots, X_n)$  est i.i.d.. Observons que celle-ci est invariante par permutation des indices et qu'ainsi, si  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  a même loi que  $(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)})$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\sigma = \tau] &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : X_{\tau(1)}(\omega) < X_{\tau(2)}(\omega) < \dots < X_{\tau(n)}(\omega)\}] \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) < X_2(\omega) < \dots < X_n(\omega)\}] \end{aligned}$$

ne dépend pas de  $\tau$  et donc établie le résultat. □

**Preuve de la Proposition 6 :** Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in B] &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{P}[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in B, \sigma = \tau] \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{P}[(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)}) \in B, X_{\tau(1)} < X_{\tau(2)} < \dots < X_{\tau(n)}]. \end{aligned}$$

On utilise une nouvelle fois que, pour tout  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ ,  $(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)})$  à même loi que  $(X_1, \dots, X_n)$  pour obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \in B] &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{P}[(X_1, \dots, X_n) \in B, X_1 < X_2 < \dots < X_n] \\ &= n! \mathbf{P}[(X_1, \dots, X_n) \in B, X_1 < X_2 < \dots < X_n] \\ &= n! \int_B \mathbf{1}_{x_1 < x_2 < \dots < x_n} \prod_{k=1}^n f(x_k) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Ceci établie le premier point.

Tournons nous vers le second point.

$$\begin{aligned} F_{X_{(k)}}(x) &= \mathbf{P}[X_{(k)} \leq x] \\ &= \mathbf{P}[\text{au moins } k \text{ des } X_j \text{ sont } \leq x] \\ &= \sum_{l=k}^n \mathbf{P}[\text{exactement } l \text{ des } X_j \text{ sont } \leq x] \\ &= \sum_{l=k}^n \binom{n}{l} \mathbf{P}[X_1 \leq x]^l \mathbf{P}[X_1 > x]^{n-l} \quad (X_j \text{ i.i.d.}) \\ &= \sum_{l=k}^n \binom{n}{l} F(x)^l (1 - F(x))^{n-l}. \end{aligned}$$

Puisque la loi mère est à densité, les formules précédentes permettent, en dérivant, de

déduire le résultat annoncé. En effet, on obtient en dérivant en  $x$  que

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(k)}}(x) &= f(x) \sum_{l=k}^n \binom{n}{l} l F(x)^{l-1} (1-F(x))^{n-l} - f(x) \sum_{l=k}^n (n-l) \binom{n}{l} F(x)^l (1-F(x))^{n-l-1} \\
 &= f(x) \sum_{l=k}^n \binom{n}{l} l F(x)^{l-1} (1-F(x))^{n-l} - f(x) \sum_{l=k}^{n-1} (n-l) \binom{n}{l} F(x)^l (1-F(x))^{n-l-1} \\
 &= n f(x) \sum_{l=k}^n \binom{n-1}{l-1} F(x)^{l-1} (1-F(x))^{n-l} \\
 &\quad - n f(x) \sum_{l=k}^{n-1} (n-l) \binom{n-1}{l} F(x)^l (1-F(x))^{n-l-1} \\
 &= n f(x) \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j-1} \\
 &\quad - n f(x) \sum_{l=k}^{n-1} (n-l) \binom{n-1}{l} F(x)^l (1-F(x))^{n-l-1} \\
 &= n f(x) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \\
 &= k f(x) \binom{n}{k} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$l \binom{n}{l} = n \binom{n-1}{l-1}, \quad (n-l) \binom{n}{l} = n \binom{n-1}{l},$$

le changement d'indice  $j = l - 1$ , un télescopage de termes et finalement que

$$n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}.$$

□

Revenons maintenant au cadre des lois exponentielles.

**Proposition 7.** Soit  $\lambda > 0$  et  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

Notons  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  le réarrangement croissant de  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$ .

Alors,

1. une densité de  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto n! \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k\right) \mathbf{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n};$$

2. les  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont indépendantes et on a  $Y_k \sim \mathcal{E}(\lambda(n-k+1))$ .



**Preuve :** Le premier point est une simple application de la Proposition 6 1.. Celui-ci étant acquis on utilise la méthode de la fonction muette pour déterminer une densité de  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

Soit  $\varphi$  une fonction mesurable positive. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varphi(Y_1, \dots, Y_n)] &= \mathbf{E}[\varphi(X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)})] \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) n! \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k\right) \mathbf{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D \varphi(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) n! \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k\right) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

où  $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ . L'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$$

définie un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $D$  dans  $(\mathbf{R}_+^*)^n$  de réciproque

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(y_1, y_1 + y_2, \dots, \sum_{k=1}^n y_k\right)$$

et de jacobien 1. En réalisant le changement de variable, on obtient que :

$$\mathbf{E}[\varphi(Y_1, \dots, Y_n)] = \int_{(\mathbf{R}_+^*)^n} \varphi(y_1, \dots, y_n) n! \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n (n - k + 1) y_k\right) dy_1 \dots dy_n.$$

Ainsi, une densité de  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} n! \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n (n - k + 1) y_k\right) \mathbf{1}_{(\mathbf{R}_+^*)^n}(y_1, \dots, y_n) \\ = n! \lambda^n \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda(n - k + 1) y_k) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(y_k) \\ = \prod_{k=1}^n \lambda(n - k + 1) \exp(-\lambda(n - k + 1) y_k) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(y_k). \end{aligned}$$

Celle-ci se factorisant en le produit de  $n$  fonctions d'une variable, on obtient que  $Y_1, \dots, Y_n$  sont indépendantes et on identifie aisément leurs lois respectives.  $\square$

## 1.6 Applications

### 1.6.1 Tarification des appels téléphoniques

Un opérateur téléphonique choisi les modalités suivantes de tarification pour les appels de ses clients. Un coût fixe  $\alpha \text{€}$  est appliqué pour chaque appel et lorsque l'appel est particulièrement long, disons dure plus d'un temps  $t_0$ , un surcoût de  $\beta \text{€}$  par minute (lissé) est appliqué. Si l'on désigne par  $T$  la durée d'un appel, le coût facturé pour celui-ci s'écrit :

$$C = \alpha + \beta(T - t_0) \mathbf{1}_{T \geq t_0}.$$

On suppose que la durée d'un appel est distribué selon la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , autrement dit que  $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

Le coût moyen d'un appel est alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[C] &= \mathbf{E}[\alpha + \beta(T - t_0)\mathbf{1}_{T \geq t_0}] \\
 &= \alpha + \beta \int_{t_0}^{+\infty} (t - t_0)\lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \alpha + \beta \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda(x+t_0)} dx \quad (x = t - t_0) \\
 &= \alpha + \beta e^{-\lambda t_0} \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \alpha + \frac{\beta e^{-\lambda t_0}}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

### 1.6.2 Fiabilité des systèmes

On s'intéresse à la probabilité de bon fonctionnement (ou de survie) d'un système produit industriellement et à son *taux de pannes*  $\tau$  (que l'on définira plus précisément par la suite) en fonction du temps  $t$ . On s'attend à ce que trois phases apparaissent :

- une période de *rodage* (ou *infantile*) entre l'instant 0 de mise en fonctionnement et l'instant  $t_r$  durant la quelle taux de pannes décroît,
- une période *utile* (ou de *maturité*) entre  $t_r$  et l'instant  $t_v$  durant laquelle le taux de pannes est constant,
- une période d'*usure* (ou de *vieillesse*) à partir de l'instant  $t_v$  durant la que le taux de pannes croît.

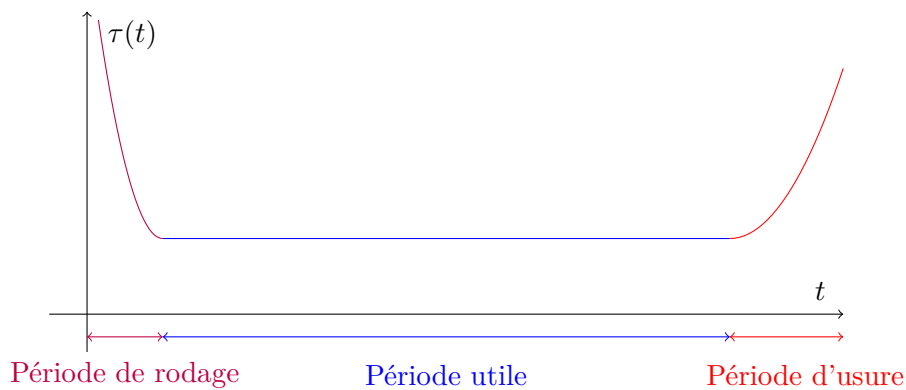


FIGURE 1 – Représentation du taux de panne  $\tau$  en fonction du temps  $t$

Pour étudier le taux de panne du système, on peut imaginer démarrer simultanément à l'instant 0 un grand nombre  $n_0$  de systèmes identiques, indépendamment, et s'intéresser à la proportion d'entre eux tombant en panne dans un petit intervalle de temps. Pour cela notons  $n(t)$  le nombre de systèmes encore en fonctionnement au temps  $t$ . La proportion de systèmes

tombant en panne sur l'intervalle de temps  $[t, t + h]$  s'écrit alors :

$$\frac{n(t) - n(t + h)}{n(t)}$$

et donc taux de panne moyen sur l'intervalle de temps  $[t, t + h]$  s'écrit alors :

$$\frac{n(t) - n(t + h)}{n(t)h}. \quad (1.2)$$

Notons  $T$  le temps (aléatoire) au bout duquel la première défaillance pour un des systèmes survient et définissons la fonction de survie de celui-ci par :

$$\forall t \geq 0, R(t) = \mathbf{P}[T > t].$$

On supposera que le système arrive presque sûrement à démarrer, ce qui semble raisonnable, autrement dit que  $R(0) = 1$ . On supposera également que  $T$  est absolument continue et admet pour densité  $f$  et  $F = 1 - R$  pour fonction de répartition.

En supposant que  $T$  admette un moment d'ordre 1, il vient par la loi des grands nombres que, presque sûrement  $n(t)/n_0$  converge vers  $R(t)$ . On peut donc considérer que pour  $n_0$  grand :

$$\frac{n(t)}{n_0} \simeq R(t).$$

En utilisant cette approximation dans (1.2) ; il vient que le taux de panne moyen sur l'intervalle de temps  $[t, t + h]$  est approximativement :

$$\frac{R(t) - R(t + h)}{R(t)}h.$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, ceci conduit à définir le *taux de panne (instantané)* comme :

$$\tau(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad t \geq 0.$$

Remarquons que  $R = 1 - F$  est bien dérivable presque partout de dérivée  $-f$  puisque  $T$  admet pour densité  $f$ .

Généralement, la période d'utilité est bien plus étendue que la période de rodage et la plus part des systèmes connaissent leur première défaillance durant la période d'utilité. Ceci fait que considérer  $\tau$  constante n'est pas une approximation trop grossière.

**Théorème 2.** *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que  $R(0) = 1$  et que  $\tau \equiv \lambda$  sur  $\mathbf{R}_+$ .*

*Alors,  $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .*

**Preuve :** Il vient de la définition de  $\tau$  et de l'hypothèse  $\tau \equiv \lambda$  sur  $\mathbf{R}_+$  que :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \lambda R(t).$$

On a supposé  $T$  à densité donc  $R = 1 - F$  dérivable presque partout sur  $\mathbf{R}_+$  et  $f$  l'est aussi. En dérivant, on obtient que  $f$  satisfait l'équation différentielle :

$$f'(t) + \lambda f(t) = 0, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

Quitte à rectifier sur un ensemble de mesure nulle, il s'ensuit qu'il existe une constante  $c$  telle que :

$$\forall t \geq 0, f(t) = ce^{-\lambda t}.$$

L'hypothèse  $R(0) = 1$  revient à  $f(0) = \lambda$  et cette condition initiale montre que :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

d'où le résultat. □

### 1.6.3 Estimation de la durée de vie moyenne pour des données censurées

On suppose que des ampoules ont une durée de vie distribuée selon la loi exponentielle de moyenne  $m$  que l'on souhaite estimer. Pour cela, on allume  $n$  ampoule et on suppose que leurs durées de vie  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes. On observe les instants des  $r \leq n$  premières pannes  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$ . On considère l'estimateur suivant de  $m$  :

$$\widehat{m}_r = \frac{1}{r} \left( X_{(1)} + \dots + X_{(r-1)} + (n - r + 1)X_{(r)} \right).$$

(Il s'agit de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Informellement, on attribue aux ampoules fonctionnant encore au moment auquel la  $r^e$  ampoule tombe en panne la même durée de vie que cette dernière.)

Soit  $(Y_k)_{1 \leq k \leq r}$  des v.a. indépendantes et telles que  $Y_k \sim \mathcal{E}((n-k+1)/m)$ . Grâce à la Proposition 7, on a que :

$$\begin{aligned} \widehat{m}_r &= \frac{1}{r} \left( X_{(1)} + X_{(1)} + \dots + X_{(r-1)} + (n - r + 1)X_{(r)} \right) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{r} \left( Y_1 + Y_1 + Y_2 + \dots + \sum_{k=1}^{r-1} Y_k + (n - r + 1) \sum_{k=1}^r Y_k \right) \\ &= \frac{1}{r} (nY_1 + (n-1)Y_2 + \dots + (n-r+2)Y_{r-1} + (n-r+1)Y_r) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (n-k+1)Y_k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{m}_r] &= \mathbf{E} \left[ \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (n-k+1)Y_k \right] \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (n-k+1) \mathbf{E}[Y_k] \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (n-k+1) \frac{m}{n-k+1} \\ &= m \end{aligned}$$

et donc que  $\widehat{m}_r$  est un estimateur sans biais de  $m$ .

Nous allons voir que

$$\frac{2r}{m}\widehat{m}_r \sim \chi^2(2r). \quad (1.4)$$

Il en découle que l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur pour l'estimation de  $m$  dans ce modèle est :

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\widehat{m}_r) &= \mathbf{V}(\widehat{m}_r) \quad (\text{car il est sans biais}) \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{m}{2r}\frac{2r}{m}\widehat{m}_r\right) \\ &= \frac{m^2}{4r^2}\mathbf{V}\left(\frac{2r}{m}\widehat{m}_r\right) \\ &= \frac{m^2}{r} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que la variance de la loi  $\chi^2(k)$  est  $2k$ .

Passons à la preuve de (1.4). Pour cela rappelons que la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  est donnée par :

$$\phi_{\mathcal{E}(\lambda)}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

et celle de la loi  $\chi^2(k)$  est donnée par :

$$\phi_{\chi^2(k)}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}.$$

Il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{2r}{m}\widehat{m}_r}(t) &= \phi_{\frac{2}{m}\sum_{k=1}^r(n-k+1)Y_k}(t) \quad (\text{car ces deux variables ont même loi d'après (1.3)}) \\ &= \prod_{k=1}^r \phi_{Y_k}\left(\frac{2t(n-k+1)}{m}\right) \quad (\text{par indépendance des } (Y_k)_{1 \leq k \leq r}) \\ &= \prod_{k=1}^r \frac{\frac{n-k+1}{m}}{\frac{n-k+1}{m} - i\frac{2t(n-k+1)}{m}} \\ &= (1 - 2it)^{-k}. \end{aligned}$$

On peut également construire un intervalle de confiance pour  $m$  à partir de (1.4). Étant fixé un risque  $\alpha \in ]0, 1[$ , on cherche  $b$  tel que

$$\mathbf{P}[m \in [0, b]] = 1 - \alpha.$$

Ceci étant équivalent à :

$$\mathbf{P}\left[\frac{2r\widehat{m}_r}{m} < \frac{2r\widehat{m}_r}{b}\right] = \alpha$$

il vient que  $b = 2rq_\alpha^{-1}\widehat{m}_r$  où  $q_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi  $\chi^2(2r)$  et l'intervalle de confiance au risque  $\alpha$  est :

$$\left[0, 2rq_\alpha^{-1}\widehat{m}_r\right].$$

Application numérique :  $\alpha = 0,01$ ,  $r = 10$ ,  $q_\alpha \simeq 8,260398$ ,  $b \simeq 2,421191\widehat{m}_r$ .

Si on observe  $\widehat{m}_r \simeq 500\text{h}$ , on peut affirmer qu'il y a moins de 1% de chance de se tromper en prétendant que la vraie durée de vie moyenne des ampoules est inférieure à 1210,595h.

### 1.6.4 Hauteur pour une digue afin d'éviter les inondations

L'exemple suivant donne un modèle très simplifié.

On suppose vouloir construire un digue de protection en bord de mer. On modélise la hauteur de la plus haute des vagues arrivée en une année par des v.a.i.i.d.  $(X_k)_{k \geq 1}$  de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

Alors, la hauteur maximale observée en  $n$  années est

$$M_n := \max_{k=1}^n X_k.$$

On note  $h = h_{\text{exact}}$  la hauteur de la digue à construire et on souhaite qu'il y ait un risque  $\alpha \in ]0, 1[$  pour que celle-ci laisse passer une vague dans les  $n$  prochaines années. Par croissance de la fonction de répartition, on cherche donc  $h$  tel que

$$\mathbf{P}[M_n \leq h] = 1 - \alpha$$

soit en utilisant le caractère i.i.d. des  $(X_k)$

$$\mathbf{P}[X_1 \leq h]^n = 1 - \alpha$$

soit encore

$$(1 - e^{-\lambda h})^n = 1 - \alpha.$$

Il vient ainsi que  $h_{\text{exact}} = -\lambda^{-1} \ln\left(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}\right)$  convient.

Notons que la Proposition 5 montre que  $M_n$  p.s. croit asymptotiquement logarithmiquement. Il faudra donc fixer une échéance et la hauteur choisie, quel qu'elle soit, ne suffira pas pour toujours!

Par ailleurs, la Proposition 5 assure également que  $(\lambda M_n - \ln(n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire de Gumbel (standard). En supposant  $n$  grand (on veut que la protection soit efficace longtemps), ceci nous permet de considérer que  $\lambda M_n - \ln(n)$  suit approximativement la loi de Gumbel. Il faut alors chercher  $h = h_{\text{approx.}}$  tel que

$$\mathbf{P}[\lambda M_n - \ln(n) \leq \lambda h - \ln(n)] = 1 - \alpha$$

c'est-à-dire tel que

$$\exp(-\exp(-\lambda h + \ln(n))) = 1 - \alpha$$

Il vient alors qu'une hauteur approximative de  $h_{\text{approx.}} \simeq \lambda^{-1}(\ln(n) - \ln(-\ln(1 - \alpha)))$  convient.  
Application numérique : On suppose que la hauteur moyenne des vagues est de 0,7m, que le risque est fixé à 5% et que la protection doit être efficace 100 ans. Il vient alors que :

$$h_{\text{exact}} \simeq h_{\text{approx.}} \simeq 10,82\text{m.}$$

Ceci semble colossal! Mais pourtant, si l'on construit une digue 4,28m, elle n'empêchera la submersion durant la première année qu'avec probabilité :

$$\mathbf{P}[X_1 \leq 4,28] = 1 - e^{-0,7 \times 4,28} \simeq 0,95.$$

On pourrait reprocher à la modélisation proposée l'hypothèse d'indépendance. Par exemple, si l'on considérait chacune des vagues arrivant sur le rivage séparément, on pourrait s'attendre à ce que les excédants, les vagues dont la hauteur dépasse un certain seuil n'arrivent pas de

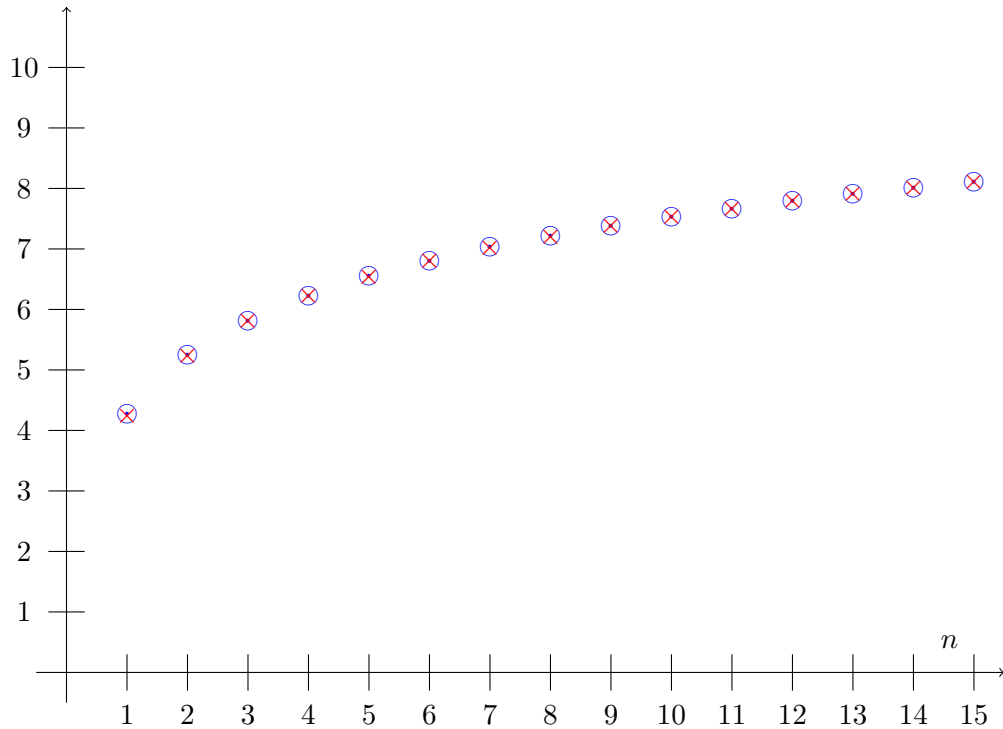


FIGURE 2 – Représentation de  $h_{\text{exact}}$   $\odot$  et  $h_{\text{approx}}$   $\times$  en fonction de  $n$  avec  $\alpha = 0,05$  et  $\lambda = 0,7$ . Même pour les petites valeurs de  $n$  l'approximation est très correcte.

façon isolée car leur apparition est certainement liée, entre autres, à des facteurs climatiques les favorisant et s'étendant un peu dans le temps. Ceci est lié à la notion d'*indice extrême* correspondant à l'inverse de la taille moyenne d'un cluster d'excédants. On apprend dans l'Exemple 8.1.5 de [7], tiré de Weissman que si on suppose le champs aléatoire donnant la hauteur maximale des vagues par année stationnaire d'indice extrême 0,5 (comme si les records avaient lieu durant des tempêtes hivernales s'étendant entre décembre et janvier), une digue d'une dizaine de mètres serait suffisante. Ce n'est pas dramatiquement différent. On réfère, par exemple, [7] ou [12] pour des modèles bien plus élaborés dépassant les objectifs de ce cours.

## 2 Processus de Poisson

### 2.1 Processus de Poisson : un processus d'arrivées

On souhaite modéliser des temps d'arrivées de certains événements. Pour cela, on se donne une suite  $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  de v.a.r. continues à valeurs positives donnant les temps inter-arrivées et on pose :

$$T_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, T_n = \sum_{k=0}^n \tau_k.$$

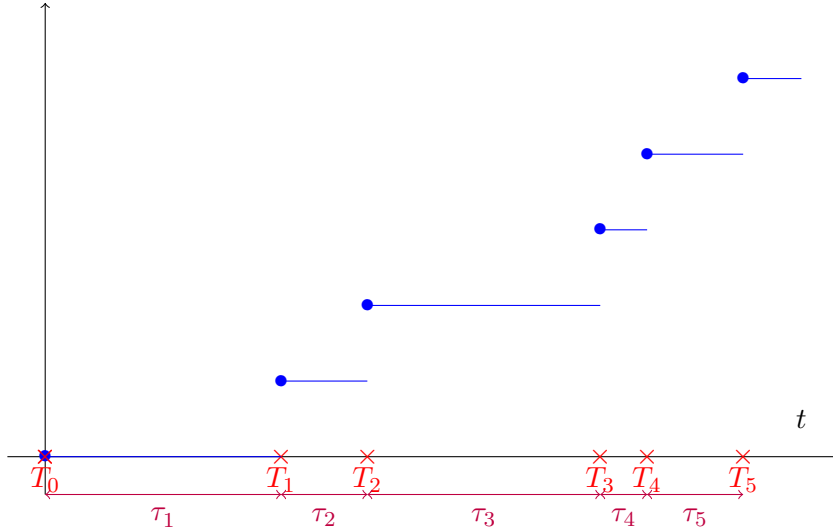


FIGURE 3 – Une réalisation de  $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ ,  $(T_k)_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(N_t)_{t \geq 0}$

Ainsi,  $T_n$  est l'instant de la  $n^e$  arrivée et

$$N_t = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mathbf{1}_{T_k \leq t}$$

compte le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Les  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  forment un nuage aléatoire de points dans  $\mathbf{R}_+^*$  appelé *processus ponctuel*. Ceux-ci sont p.s. distincts puisque  $\cup_{k \in \mathbf{N}^*} \{\tau_k = 0\}$  est négligeable comme union dénombrable d'événements de mesure nulle. On qualifie ce processus *simple*.

**Définition 3.** Avec les notations précédentes, si les  $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , on dit que  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est un processus ponctuel de Poisson (homogène) d'intensité  $\lambda$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus (d'arrivées) de Poisson d'intensité  $\lambda$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Remarque 5.** Il apparaît que  $t \mapsto N_t$  de  $\mathbf{R}_+$  vers  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  est p.s. à valeurs entières, croissant, càdlàg et possède des sauts de taille 1.

**Proposition 8.** Soient  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus d'arrivées de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$  et  $(T_k)_{k \in \mathbf{N}}$  le processus ponctuel de Poisson associé. Alors,  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ .

De plus, conditionnellement à  $\{N_t = n\}$ ,  $(T_1, \dots, T_n)$  à la loi de la statistique d'ordre de  $n$  v.a.i.i.d. uniformes sur  $[0, t]$ .

**Remarque 6.** Cette proposition fournit un moyen de simuler facilement un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  sur  $[0, t]$  : on commence par se donner la réalisation  $N_t$  d'une v.a. de Poisson de paramètre  $\lambda t$  puis on tire  $N_t$  points uniformément et indépendamment sur  $[0, t]$ . En les ordonnant de façon croissante, ils ne sont autres que  $T_1, \dots, T_{N_t}$ .



**Preuve :** Puisque les  $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k$  suit la loi d'Erlang de paramètres  $n$  et  $\lambda$  et

$$\mathbf{P}[N_t \geq n] = \mathbf{P}[T_n \leq t] = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Il s'ensuit que, pour  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N_t = n] &= \mathbf{P}[N_t \geq n] - \mathbf{P}[N_t \geq n+1] \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \right]_0^t \quad (\text{I.P.P.}) \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

De plus,  $\mathbf{P}[N_t = 0] = \mathbf{P}[\tau_1 > t] = e^{-\lambda t}$ . Ainsi,  $T_n \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ . Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ . On a :

$$\mathbf{P}[(T_1, \dots, T_n) \in B, N_s = n] = \mathbf{P}[(T_1, \dots, T_n) \in B, T_n \leq s < T_{n+1}].$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de déduire par la méthode de la fonction muette que, puisque les  $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , une densité de  $(T_1, \dots, T_{n+1})$  est donnée par :

$$(t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_{n+1}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[(T_1, \dots, T_n) \in B, N_s = n] &= \int_B \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < s < t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \\ &= \int_B \lambda^n e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < s} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[(T_1, \dots, T_n) \in B | N_s = n] &= \int_B \lambda^n e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < s} \frac{n!}{(\lambda s)^n e^{-\lambda s}} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_B \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < s} \frac{n!}{s^n} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Mais la Proposition 6 montre que si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, s]$ , alors une densité de  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{0 < x_1 < \dots < x_n < s}.$$

Le résultat s'ensuit. □

## 2.2 Processus de Poisson : un processus de comptage

Le *processus de Poisson* est un *processus de comptage* au sens de la définition suivante.

**Définition 4.** Un processus de comptage est un processus  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  dont les trajectoires sont dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , croissant, càd à valeurs dans  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  vérifiant  $N_0 = 0$ .

### Remarque 7.

1. Il est croissant et càd donc càdlàg.
2.  $N_t$  représente le nombre de points tombant dans l'intervalle  $[0, t]$  donc le nombre de points tombant dans l'intervalle  $]s, t]$  est  $N_t - N_s$ .
3. Certains auteurs imposent, de plus, une ou plusieurs des conditions suivantes :
  - (a) les sauts de  $N_t$  sont p.s. de taille 1 ;
  - (b)  $N_t < +\infty$  p.s. ;
  - (c)  $N_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} +\infty$ .

Le processus de Poisson est particulièrement populaire du fait des agréables propriétés qu'il possède :

1. il est *simple* (les sauts de  $N_t$  sont p.s. de taille 1) : les points/événements n'arrivent p.s. pas simultanément ;
2. si l'on considère des intervalles de temps disjoints, les nombres de points tombant dans ceux-ci sont des variables aléatoires indépendantes ;
3. la loi du nombre de points dans un intervalle de temps est explicite.

**Définition 5.** On appelle processus de comptage de Poisson (homogène) d'intensité  $\lambda > 0$  un processus de comptage vérifiant :

1.  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k : N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \text{ sont indépendantes ;}$$

2. le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de longueur  $s \geq 0$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda s)$  :

$$\forall s, t \geq 0, \forall k \in \mathbf{N} : \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = k] = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!}.$$

**Remarque 8.** En particulier,  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ .

## 2.3 Équivalence des modèles

**Théorème 3.** Un processus est un processus d'arrivée de Poisson d'intensité  $\lambda$  au sens de la Définition 3 si, et seulement si, il est un processus de comptage de Poisson d'intensité  $\lambda$  au sens de la Définition 5. On parlera donc simplement de processus de Poisson.

### Preuve :

Le fait qu'un processus d'arrivée de Poisson d'intensité  $\lambda$  au sens de la Définition 3 soit un processus de comptage de Poisson d'intensité  $\lambda$  au sens de la Définition 5, s'obtient assez facilement à partir de la Proposition 8.

Pour cela, donnons nous  $0 < t_1 < \dots < t_k$ ,  $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$  et posons  $n = n_1 + \dots + n_k$ .  
On a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k] \\ &= \mathbf{P} [N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k | N_{t_k} = n] \mathbf{P} [N_{t_k} = n]. \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition 8, conditionnellement à  $\{N_{t_k} = n\}$ , les  $n$  points sont distribués uniformément et indépendamment dans  $[0, t_k]$  donc, toujours conditionnellement à  $\{N_{t_k} = n\}$ , le nombre tombant dans les intervalles  $[0, t_1], ]t_1, t_2], \dots, ]t_{k-1}, t_k]$  suit la loi multinomiale de paramètre  $(\frac{t_1}{t_k}, \frac{t_2-t_1}{t_k}, \dots, \frac{t_k-t_{k-1}}{t_k})$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k | N_{t_k} = n] \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^k n_j!} \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^{n_1} \prod_{j=2}^k \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_k}\right)^{n_j} \end{aligned}$$

puis, en utilisant que  $N_{t_k} \sim \mathcal{P}(\lambda t_k)$  d'après la Proposition 8, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k] \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^k n_j!} \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^{n_1} \prod_{j=2}^k \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_k}\right)^{n_j} e^{-\lambda t_k} \frac{(\lambda t_k)^n}{n!} \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda t_1} \prod_{j=2}^k \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{n_j}}{n_j!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}. \end{aligned}$$

Ceci montre que les accroissements de  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont indépendants et suivent les lois de Poisson adéquates.

Pour la réciproque, on se donne un processus (de comptage) de Poisson  $(N_t)_{t \geq 0}$  au sens de la Définition 5 et on définit les instants de  $k^{\text{e}}$  saut de  $N_t$  par :

$$T_k = \inf\{t \geq 0 : N_t = k\}.$$

On détermine ensuite la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$ . Soient  $0 < s_1 < s_1 + t_1 < s_2 < \dots < s_n < s_n + t_n$ .  
On a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [s_1 < T_1 < s_1 + t_1 < s_2 < T_2 < s_2 + t_2 < \dots < s_n < T_n < s_n + t_n] \\ &= \mathbf{P} [N_{s_1} = 0, N_{s_1+t_1} - N_{s_1} = 1, N_{s_2} - N_{s_1+t_1} = 0, N_{s_2+t_2} - N_{s_2} = 1, \dots, N_{s_n+t_n} - N_{s_n} \geq 1] \\ &= \mathbf{P} [N_{s_1} = 0] \prod_{k=1}^{n-1} (\mathbf{P} [N_{s_k+t_k} - N_{s_k} = 1] \mathbf{P} [N_{s_{k+1}} - N_{s_k+t_k} = 0]) \mathbf{P} [N_{s_n+t_n} - N_{s_n} \geq 1] \end{aligned}$$

par indépendance des accroissements. En utilisant que ceux-ci suivent des lois de Poisson, il vient que :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [s_1 < T_1 < s_1 + t_1 < s_2 < T_2 < s_2 + t_2 < \dots < s_n < T_n < s_n + t_n] \\ &= e^{-\lambda s_1} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \lambda t_k e^{-\lambda t_k} e^{-\lambda(s_{k+1} - s_k - t_k)} \right) (1 - e^{-\lambda t_n}) \\ &= \lambda^{n-1} e^{-\lambda s_n} (1 - e^{-\lambda t_n}) \prod_{k=1}^{n-1} t_k. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \int_{s_1 < x_1 < s_1 + t_1 < s_2 < x_2 < s_2 + t_2 < \dots < s_n < x_n < s_n + t_n} \lambda^n e^{-\lambda x_n} \mathbf{1}_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n} \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \lambda^{n-1} e^{-\lambda s_n} (1 - e^{-\lambda t_n}) \prod_{k=1}^{n-1} t_k. \end{aligned}$$

Donc une densité de  $(T_1, \dots, T_n)$  est :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \lambda^n e^{-\lambda x_n} \mathbf{1}_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n}.$$

On définit ensuite les temps inter-arrivées :

$$\Delta_1 = T_1 \quad \text{et} \quad \Delta_k = T_k - T_{k-1}, \quad k \in \{2, \dots, n\}.$$

Il reste à voir que  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , ce qui se fait par la méthode de la fonction muette.

Soit  $\varphi$  une fonction mesurable positive sur  $\mathbf{R}^n$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varphi(\Delta_1, \dots, \Delta_n)] &= \mathbf{E}[\varphi(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})] \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \lambda^n e^{-\lambda x_n} \mathbf{1}_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n} \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D \varphi(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \lambda^n e^{-\lambda x_n} \, dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

où  $D = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ . On utilise, une nouvelle fois, que l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$$

définie un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $D$  dans  $(\mathbf{R}_+^*)^n$  de réciproque

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left( y_1, y_1 + y_2, \dots, \sum_{k=1}^n y_k \right)$$

et de jacobien 1. En réalisant le changement de variable, on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varphi(\Delta_1, \dots, \Delta_n)] &= \int_{(\mathbf{R}_+^*)^n} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n y_k} \, dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \prod_{k=1}^n \left( \lambda e^{-\lambda y_k} \mathbf{1}_{y_k > 0} \right) \, dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

ce qui établit que  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et termine la preuve.  $\square$

## 2.4 Propriétés

La proposition suivante est une conséquence immédiate du dernier point de la Définition 5.

**Proposition 9** (Stationnarité). *Tout processus de Poisson (homogène) est à accroissements stationnaires :*

$$\forall s, t \geq 0, \quad N_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_{t+s} - N_t.$$

**Proposition 10** (Locale continuité en probabilité). *Tout processus de Poisson (homogène) est localement continu en probabilité :*

$$\forall t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t \geq 1] = 0.$$

**Preuve :** Il suffit d'écrire que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t \geq 1] &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}[N_h \geq 1] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 - \mathbf{P}[N_h = 0] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 - e^{-\lambda h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Proposition 11** (Superposition). *Soient  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(M_t)_{t \geq 0}$  deux processus de Poisson indépendants d'intensité  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement. On définit pour tout  $t \geq 0$  :*

$$L_t = N_t + M_t.$$

*Alors,  $(L_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda + \mu$ .*

**Preuve :** Il est facile de voir que les propriétés de croissance, càd à valeurs dans  $N \cup \{+\infty\}$  ainsi que  $L_0 = 0$ . En écrivant que

$$\forall t, s, L_{t+s} - L_t = N_{t+s} - N_t + M_{t+s} - M_t,$$

il vient que  $L_{t+s} - L_t$  suit la loi  $\mathcal{P}((\lambda + \mu)s)$  comme somme de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda s$  et  $\mu s$ .

Il n'est pas difficile de voir qu'il est à accroissement indépendant en utilisant le même type de décomposition. □

La proposition précédente montre que si l'on modélise les instants d'appels d'urgence passés au 15 par un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et ceux passés au 112 par un processus de Poisson d'intensité  $\mu$  et que l'on les suppose indépendants, l'ensemble des instants d'appels d'urgence sera distribué selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda + \mu$ , ce qui est moral.

Il est également possible de penser à amincir un processus de Poisson. La présentation ci-dessous est assez informelle et sera précisée dans la Section 3. Pensons que l'on modélise des instants d'appels téléphoniques reçus par un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\lambda$  et que l'on décide de répondre ou non à un appel avec probabilités  $p \in [0, 1]$ , indépendamment d'un appel à l'autre. Les appels auxquels on aura répondu seront alors distribués selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $p\lambda$ .

## 2.5 Une caractérisation

Le résultat suivant montre que certaines des propriétés du processus de Poisson (homogène) discutées dans la sous-section précédente suffisent à le caractériser.

**Théorème 4.** *Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de comptage vérifiant :*

1.  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants,
2.  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements stationnaires,
3.  $(N_t)_{t \geq 0}$  est localement continu en probabilité.

*Alors,  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson.*

**Preuve :** L'étape principale dans cette démonstration réside en la preuve du Lemme suivant. Celle-ci est reportée à la sous-section suivante.

**Lemme 3.** *Sous les hypothèses du Théorème 4, il existe  $\lambda > 0$  tel que*

$$\forall t \geq 0, N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

L'hypothèse de stationnarité permet ensuite d'en déduire que

$$\forall s, t \geq 0, N_{t+s} - N_t \sim \mathcal{P}(\lambda s),$$

ce qui est la seule chose à vérifier. □

### 2.5.1 Preuve du Lemme 3

Notons  $p(h)$  la probabilité pour qu'il se produise au moins une arrivée dans un intervalle de temps de longueur  $h$ . Notons que par l'hypothèse de stationnarité des accroissements celle-ci ne dépend pas de  $t$  :

$$p(h) = \mathbf{P}[N_h \geq 1] = \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t \geq 1], \quad \forall t \geq 0$$

et que celle-ci tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$  par locale continuité en probabilité.

On commence par montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.** *Sous les hypothèses du Théorème 4, il existe  $\lambda \geq 0$  tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad p(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

**Preuve :** On pose, pour tout  $t \geq 0$ ,  $f(t) = 1 - p(t)$ .

Il vient que, pour tous  $s, t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} f(t+s) &= \mathbf{P}[N_{t+s} = 0] = \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t + N_t = 0] \\ &= \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = 0, N_t = 0] \quad (\text{car } (N_t)_{t \geq 0} \text{ est un processus de comptage}) \\ &= \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = 0] \mathbf{P}[N_t = 0] \quad (\text{car } (N_t)_{t \geq 0} \text{ est à accroissements indépendants}) \\ &= \mathbf{P}[N_s = 0] \mathbf{P}[N_t = 0] = f(s)f(t) \quad (\text{car } (N_t)_{t \geq 0} \text{ est à accroissements stationnaires}). \end{aligned}$$

La solution  $f \equiv 0$  revient à  $p \equiv 1$  et contredit la locale continuité en probabilité. Elle est donc exclue. Il vient donc que  $f$  est de la forme  $f(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , et sa bornitude implique qu'elle est en fait de la forme  $f(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , pour un certain  $\lambda \geq 0$ . □

On exclue pour la suite le cas  $\lambda = 0$  puisqu'il correspond au cas dégénéré dans lequel p.s. aucune arrivée ne survient. On suppose donc  $\lambda > 0$ .

Nous sommes maintenant prêts à entamer la partie principale de la preuve du Lemme 3.

Soit  $t > 0$ . Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , posons :

$$I_k = \left] \frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n} \right].$$

On admet provisoirement que : **(A)** pour tous  $a < b < +\infty$  la probabilité pour qu'une infinité d'arrivées surviennent dans l'intervalle de temps  $]a, b]$  est nulle.

On note  $X_k = N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}}$  la v.a. donnant le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps  $I_k$ . Les  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont à valeurs dans  $\mathbf{N}$  par **(A)**, indépendantes car  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants et les  $I_k$  disjoints et identiquement distribuées car  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements stationnaires et les  $I_k$  sont de même longueur. On pose ensuite pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $Y_k = \mathbf{1}_{X_k \geq 1}$ . Il vient alors que les  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p(t/n))$  et donc que

$$S_n := \sum_{k=1}^n Y_k \sim \mathcal{B}\left(n, p\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

De plus,  $S_n \leq N_t$ .

Avec **(A)** et puisque la probabilité pour que deux arrivées simultanées surviennent est nulle (stationnarité et  $N_0 = 0$ ), il vient que pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , un nombre fini d'arrivées distinctes surviennent dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  et donc que l'on peut trouver  $n_0 = n_0(\omega)$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  au plus une arrivée survient dans chacun des intervalles  $I_1, \dots, I_n$ . Ainsi, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , pour tout  $n \geq n_0(\omega)$ ,  $S_n(\omega) = N_t(\omega)$ . En particulier,  $S_n$  converge p.s. et donc en loi vers  $N_t$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Mais, puisque  $S_n \sim \mathcal{B}(n, p(t/n))$ ,  $S_n$  converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} np\left(\frac{t}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(1 - e^{-\lambda \frac{t}{n}}\right) && \text{(d'après le Lemme 4)} \\ &= \lambda t. \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, il vient que  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$  et le résultat est établi moyennant la justification de **(A)**.

Preuve de **(A)** : Par stationnarité, sans perte de généralité, il suffit de justifier que  $\mathbf{P}[N_t = +\infty] = 0$ . Puisque  $\{N_t = +\infty\}$  est un événement de la tribu terminale, il est de probabilité 0 ou 1. Par l'absurde, supposons que  $\mathbf{P}[N_t = +\infty] = 1$ . Puisque p.s. une infinité d'arrivées ont lieu entre les instants 0 et  $t$ , p.s. une infinité d'arrivées ont lieu entre les instants 0 et  $t/2$  ou entre les instants  $t/2$  et  $t$ . On obtient par stationnarité que p.s. une infinité d'arrivées ont lieu entre les instants 0 et  $t/2$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{P}[N_{\frac{t}{2}} = +\infty] = 1$ . Par une récurrence immédiate, il vient que  $\mathbf{P}[N_{\frac{t}{2^k}} = +\infty] = 1$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ . Mais  $\mathbf{P}[N_{\frac{t}{2^k}} = +\infty] \leq \mathbf{P}[N_{\frac{t}{2^k}} \geq 1]$  et cette dernière quantité converge vers 0 par locale continuité en probabilité. Une contradiction.

## 2.6 Quelques champs d'application

### 2.6.1 File d'attente

On désigne par  $T_n$  la date d'arrivée du  $n^{\text{e}}$  client devant un guichet. Alors  $N_t$  est le nombre de clients arrivés pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Si on suppose que les durées entre les

deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi,  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de renouvellement. Si leur loi commune est  $\mathcal{E}(\lambda)$ , il s'agit d'un processus de Poisson.

### 2.6.2 Fiabilité

Considérons un système qui commence à fonctionner au temps 0, qui a une durée de vie de loi  $\mu$  et qui, lorsqu'il tombe en panne, est remis à neuf instantanément. Supposons que les durées de vie successives  $\tau_k$  sont indépendantes et de même loi (du fait de la remise à neuf du système à chaque panne). Alors les  $T_n$  correspondent aux instants successifs de panne (ou instants de renouvellement) et  $N_t$  au nombre de pannes constatées entre les instants 0 et  $t$ . La quantité  $T_{N_t+1} - t$  est la durée entre l'instant  $t$  et l'instant de renouvellement suivant, appelé durée de vie résiduelle au temps  $t$ , et  $t - T_{N_t}$  est le temps écoulé depuis le dernier renouvellement, appelée l'âge à l'instant  $t$ .

### 2.6.3 Gestion de stock

On désigne par  $\tau_k$  la demande d'un produit donné au cours de la  $k^e$  semaine et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors  $1 + N_t$  est le nombre de semaines nécessaire pour qu'une quantité  $t$  du produit soit vendu.

### 2.6.4 Processus de naissance et de mort

Le processus de Poisson (homogène) peut également être vu comme le plus simple des processus de naissances et de morts. Il s'agit du processus de naissances pur à taux constant.

### 2.6.5 Risque et assurance non-vie

Le processus de Poisson trouve également des applications en théorie du risque, de l'assurance non vie (ou en finance). Le lecteur désireux de plus de détails est invité à consulter [10] par exemple.

### 2.6.6 Comment contourner l'absence de loi uniforme sur un ensemble infini dénombrable

Il est bien connu qu'il n'existe pas de loi uniforme sur un ensemble infini (dénombrable). Toutefois dans certains modèles, on souhaite, pour obtenir de la stationnarité par exemple, faire jouer le même rôle à une infinité de sources ou de points. Une idée est alors de les munir d'horloges de Poisson indépendantes, disons d'intensité 1, et de les activer selon les moments où elles-ci sonnent. Un problème est que l'infimum de celles-ci est p.s. 0. Il faut donc que les règles de construction du modèle soient assez locales et des questions de convergence sont à régler au cas par cas. Cette idée a, par exemple, été exploitée dans [8] pour étudier les déformations harmoniques de Triangulations de Poisson-Delaunay ou dans [3] pour construire une forêt aléatoire basée sur un protocole d'Agrégation Limitée par Diffusion Interne avec une infinité de sources dans  $\mathbf{Z}^2$ .



## 2.7 Paradoxe de l'autobus

Le paradoxe connu sous le nom de *paradoxe de l'autobus* réside en le fait, que si l'on modélise les arrivées de bus par un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , la durée moyenne entre deux arrivées de bus est  $\lambda^{-1}$ , puisque les temps inter-arrivées sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ . On pourrait donc naïvement imaginer attendre le bus en moyenne durant un temps inférieur à  $\lambda^{-1}$  - peut-être même  $(2\lambda)^{-1}$ , si on pense arriver au milieu de deux passages- mais il n'en est rien !

**Remarque 9.** Ce paradoxe est également connu sous le nom de *paradoxe de l'inspection*, lorsque les arrivées de bus sont remplacées par des pannes sur une machine et l'arrivée de l'utilisateur à l'arrêt de bus par le début du contrôle de la machine par un inspecteur.

On reprend les notations de la Sous-section 2.1.

**Proposition 12.** Soit  $(N_t = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mathbf{1}_{T_k \leq t})_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ . Soit  $s \geq 0$  fixé. Notons  $V_s = T_{N_s+1} - s$  le temps restant avant l'arrivée suivant  $s$  (durée de vie résiduelle au temps  $s$ ) et  $W_s = s - T_{N_s}$  le temps écoulé depuis le passage précédent  $s$  (l'âge à l'instant  $s$ ).

Alors,

1.  $V_s \sim \mathcal{E}(\lambda)$  ;
2.  $V_s$  et  $W_s$  sont indépendants et la loi de  $W_s$  est

$$e^{-\lambda s} \delta_s(u) + \lambda e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{[0,s]}(u) du,$$

autrement dit  $W_s$  à même loi que  $\min(s, T_1)$  où  $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$  ;

3.  $\mathbf{E}[V_s + W_s] = \mathbf{E}[T_{N_s+1} - T_{N_s}] = \lambda^{-1}(2 - e^{-\lambda s})$ .

**Remarque 10.** Il est rassurant de constater que pour  $s = 0$ , l'espérance donnée par le dernier point est  $\lambda^{-1}$ . Celle-ci tend vers  $2\lambda^{-1}$  lorsque  $s \rightarrow +\infty$  ce qui s'interprète intuitivement comme « les événements sont de plus en plus rares » ou encore « plus on avance dans le temps, plus on a de chance de trouver des longues plages sans événement ».

**Preuve :**

1. Soit  $v \geq 0$ . On a :

$$\mathbf{P}[V_s \leq v] = \mathbf{P}[T_{N_s+1} - s \leq v] = \mathbf{P}[N_{s+v} - N_s \geq 1] = 1 - e^{-\lambda v}.$$

2. Soient  $v, w \geq 0$ . Regardons séparément les cas  $w < s, w = s$  et  $w > s$ .

**Cas  $0 \leq w < s$  :**

$$\mathbf{P}[V_s > v, W_s \geq w] = \mathbf{P}[N_{s+v} - N_{s-w} = 0] = e^{-\lambda(v+w)} = \mathbf{P}[V_s > v] e^{-\lambda w}.$$

**Cas  $w = s$  :**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[V_s > v, W_s \geq w] &= \mathbf{P}[V_s > v, W_s = s] \\ &= \mathbf{P}[N_{s+v} - N_0 = 0] = e^{-\lambda(s+v)} = \mathbf{P}[V_s > v] e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

**Cas  $w > s$  :**

$$\mathbf{P}[V_s > v, W_s \geq w] = 0.$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[V_s + W_s] &= \mathbf{E}[V_s] + \mathbf{E}[W_s] \\
 &= \frac{1}{\lambda} + se^{-\lambda s} + \int_0^s u\lambda e^{-\lambda u} du \\
 &= \frac{1}{\lambda} + se^{-\lambda s} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s} ye^{-y} dy \quad (y = \lambda u) \\
 &= \frac{1}{\lambda} + se^{-\lambda s} + \frac{1}{\lambda} [-ye^{-y}]_0^s + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s} e^{-y} dy \quad (\text{I.P.P.}) \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} [-e^{-y}]_0^{\lambda s} \\
 &= \frac{1}{\lambda} (2 - e^{-\lambda s}).
 \end{aligned}$$

□

## 2.8 Loi des grands nombres et théorème central limite

**Théorème 5.** Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ .

Alors,

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \lambda$$

et

$$\sqrt{t} \left( \frac{N_t}{t} - \lambda \right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \lambda).$$

**Preuve :** En écrivant que pour  $t \geq 1$ ,

$$N_{[t]} = \sum_{k=1}^{[t]} N_k - N_{k-1}$$

et exploitant que les  $(N_k - N_{k-1})_{k \in \mathbf{N}^*}$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , la LGN donne que

$$\frac{N_{[t]}}{t} = \frac{N_{[t]}}{[t]} \frac{[t]}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \lambda$$

et

$$\frac{N_{[t]} + 1}{t} \frac{N_{[t]+1}}{[t] + 1} \frac{[t] + 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \lambda.$$

Par croissance de  $N$ ., on a que pour tout  $t \geq 0$  :

$$N_{[t]} \leq N_t \leq N_{[t]+1}$$

et donc par encadrement :

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \lambda.$$

Rappelons que la fonction caractéristique de  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$  est donnée par :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \phi_{N_t}(u) = \exp\left(\lambda t (e^{iu} - 1)\right).$$

On écrit ensuite que pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $s \in \mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned}
 \phi_{\sqrt{t}(\frac{N_t}{t}-\lambda)}(s) &= \mathbf{E} \left[ \exp \left( is\sqrt{t} \left( \frac{N_t}{t} - \lambda \right) \right) \right] \\
 &= e^{-i\sqrt{t}\lambda s} \mathbf{E} \left[ \exp \left( iN_t \frac{s}{\sqrt{t}} \right) \right] \\
 &= e^{-i\sqrt{t}\lambda s} \phi_{N_t} \left( \frac{s}{\sqrt{t}} \right) \\
 &= e^{-i\sqrt{t}\lambda s} \exp \left( \lambda t \left( e^{i\frac{s}{\sqrt{t}}} - 1 \right) \right) \\
 &= \exp \left( \lambda t \left( e^{i\frac{s}{\sqrt{t}}} - 1 \right) - i\sqrt{t}\lambda s \right) \\
 &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp \left( \lambda t \left( i\frac{s}{\sqrt{t}} - \frac{s^2}{2t} \right) - i\sqrt{t}\lambda s \right) \\
 &= \exp \left( -\frac{\lambda s^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

converge vers cette dernière quantité lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . En reconnaissant que cette dernière n'est autre que la fonction caractéristique de la loi normale centrée et de variance  $\lambda$ , on obtient la convergence en loi désirée.  $\square$

Il découle de ce résultat que l'on peut construire et étudier un estimateur de l'intensité d'un processus de Poisson et construire un intervalle de confiance pour celle-ci

**Proposition 13.** *Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  inconnue.*

*Alors,  $N_t/t$  est un estimateur sans biais et convergent.*

*De plus, en notant  $q_{1-\alpha/2}$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,*

$$\left[ \frac{N_t}{t} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{N_t}}{t}, \frac{N_t}{t} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{N_t}}{t} \right]$$

*est un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\lambda$ .*

**Preuve :** Il est clair que

$$\mathbf{E} \left[ \frac{N_t}{t} \right] = \frac{\mathbf{E}[N_t]}{t} = \frac{\lambda t}{t} = \lambda$$

donc l'estimateur proposé est sans biais. Sa convergence revient à la convergence p.s. établie dans le théorème précédent. Ce même théorème combiné au Lemme de Slutsky donne la convergence en loi de

$$\sqrt{\frac{t}{N_t}} \sqrt{t} \left( \frac{N_t}{t} - \lambda \right) = \frac{t}{\sqrt{N_t}} \left( \frac{N_t}{t} - \lambda \right)$$

vers une gaussienne centrée réduite. On vérifie aisément à partir de ceci que l'intervalle de confiance donné est bien un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\lambda$ .  $\square$

### 3 Prolongements possibles

#### 3.1 Processus de Poisson composés

**Définition 6.** Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson homogène sur d'intensité  $\lambda$  et  $(Y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mu$  indépendante de  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$  défini par

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

est appelé processus de Poisson composé de caractéristiques  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Application possible :** Si  $N_t$  modélise le nombre de sinistres déclarés à une compagnie d'assurance pour la période  $[0, t]$  et  $Y_k$  modélise le coût du  $i^e$  sinistre, alors  $Z_t$  est la somme totale que la compagnie doit verser pour les sinistres enregistrés durant la période  $[0, t]$ .

**Proposition 14.** Soit  $(Z_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson composé de caractéristiques  $\lambda$  et  $\mu$ .

Alors,

1.  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires ;
2. si les variables  $Y_k$  sont de loi  $(p_1, \dots, p_r)$  sur les réels  $(a_1, \dots, a_r)$  alors  $(Z_t)_{t \geq 0}$  se décompose sous la forme :

$$Z_t = \sum_{k=1}^r a_k N_t^{[k]}$$

où les  $(N_t^{[k]})_{t \geq 0}$  sont des processus de Poisson indépendants d'intensité  $p_i \lambda$ .

**Remarque 11.** Le second point est lié au fait qu'un  $p$ -amincissement indépendant d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  est un processus de Poisson d'intensité  $p\lambda$ .

#### 3.2 Processus de Poisson inhomogènes

**Définition 7.** Soit  $\Lambda$  une mesure positive  $\sigma$ -finie et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}_+$ . Soit  $T_0 = 0$  et  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite croissante de variables aléatoires positives. Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  défini sur  $\mathbf{R}_+$  par

$$\max\{n \in \mathbf{N} : T_n \leq t\}$$

est appelé processus de Poisson d'intensité  $\Lambda$  si :

1.  $(N_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants ;
2. pour tout  $t \geq 0$ ,  $N_t$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\Lambda([0, t])$ .

**Proposition 15.** 1. Pour tout  $0 \leq s < t$ ,  $N_t - N_s$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\Lambda([s, t])$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , le vecteur  $(T_1, \dots, T_n)$  a pour densité

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto e^{-\Lambda([0, t_n])} \prod_{k=1}^n \frac{d\Lambda}{d\ell}(t_k) \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $\{N_t = n\}$  est celle de la statistique d'ordre de  $n$  v.a.i.i.d. de densité  $s \mapsto \Lambda([0, t]) \frac{d\Lambda}{ds}(s) \mathbf{1}_{0 \leq s \leq t}$ .
4. Si  $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité 1,  $(\widetilde{N_{\Lambda([0, t])}})_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson inhomogène d'intensité  $\Lambda$ .

**Remarque 12.**

1. Du dernier point de la proposition précédente découle un moyen de construire ou simuler un processus de Poisson inhomogène d'intensité. En effet, si  $\lambda^\leftarrow$  désigne la pseudo inverse de la fonction  $t \mapsto \Lambda([0, t])$  et  $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  sont les points d'un processus de Poisson d'intensité 1, les  $T_n := \lambda^\leftarrow(\tilde{T}_n)$  sont les points d'un processus de Poisson inhomogène d'intensité  $\Lambda$  et  $N_t := \{n \in \mathbf{N} : T_n \leq t\}$  définit le processus de comptage de Poisson associé avec la convention  $T_0 = 0$ .
2. Ceci permet d'affiner la modélisation de files d'attentes ou des temps de pannes en fiabilité en considérant des temps d'arrivées à taux non constants (voir Figure 1).

**3.3 Processus ponctuel de Poisson dans  $\mathbf{R}^d$  ou dans des espace plus généraux**

Même s'il est possible de définir des processus ponctuels de Poisson sur des espaces plus généraux, nous n'évoquerons que la définition d'un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbf{R}^d$  de façon relativement informelle.

Soit  $\Lambda$  une mesure positive  $\sigma$ -finie et sans atome sur  $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ . On appelle *processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\Lambda$  sur  $\mathbf{R}^d$*  un ensemble aléatoire  $X$  de points de  $\mathbf{R}^d$  localement fini vérifiant :

1. pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ ,  $\#(X \cap A)$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\Lambda(A)$  ;
2. pour tout  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$  disjoints,  $\#(X \cap A_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  sont des v.a. indépendantes.

Lorsque  $\Lambda$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, de coefficient de proportionnalité  $\lambda$ , on parle de processus ponctuel de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .

La simulation de tels processus ponctuels dans un compact  $K$  est très aisée. On choisit le nombre  $N$  de points devant tomber dans  $K$  en simulant une v.a. de Poisson de paramètre  $\lambda \ell(K)$ . Connaissant  $N$ , on tire uniformément et indépendamment  $N$  points dans  $K$ .

On observe une indépendance parfaite des points d'un tel processus (voir Figure 4).

Le lecteur intéressé par plus de détails sur cette thématique ainsi que celles abordées dans les deux sous-sections suivantes est invité à consulter, par exemple, [4].

**3.4 Processus de Poisson marqués**

Il est possible de « marquer » un processus ponctuel, en attribuant une valeur aléatoire, par exemple uniforme dans  $[0, 1]$  à chacun de ses points, indépendamment.

Ceci permet de formaliser la notion de  $p$ -amincissement indépendant. Étant donné une réalisation d'un processus de Poisson marqué dans  $\mathbf{R}^d$  d'intensité  $\lambda$  avec des marques i.i.d. uniformes dans  $[0, 1]$ , on conserve un point si, et seulement si, sa marque est inférieure à  $p$ . L'ensemble des points conservés dans  $\mathbf{R}^d$  est alors un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\lambda p$  dans  $\mathbf{R}^d$ .

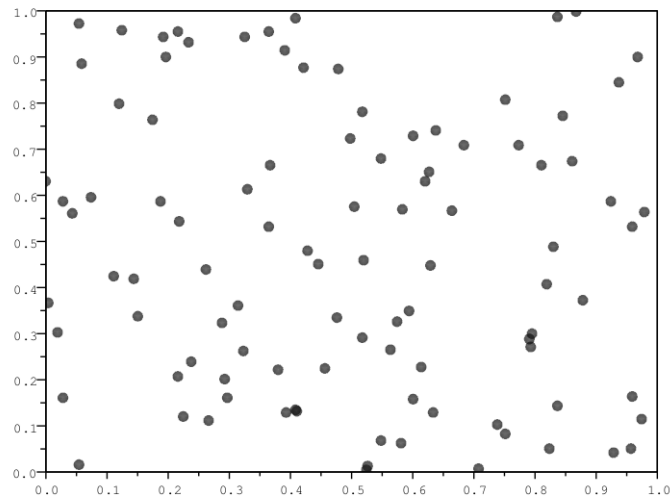


FIGURE 4 – Une réalisation d’un processus ponctuel de Poisson.

### 3.5 D’autres processus ponctuels

Bien que celle-ci facilite le traitement mathématique, la complète indépendance des points d’un processus ponctuel de Poisson (conditionnellement au nombre de points) n’est pas réaliste dans toutes les situations concrètes. En effet, si l’on souhaite modéliser des situations dans lesquelles une compétition pour les ressources existe (implantation d’arbres dans une forêt par exemple) on s’attend à ce que deux points (ou arbres) ne puissent pas être trop proches l’un de l’autre et on voudrait une forme de répulsion entre les points. Au contraire, dans certaines situations, on souhaite des modèles dans lesquels les points se regroupent en amas (attractivité), par exemple si l’on souhaite modéliser des phénomènes dans lesquels les objets sont issus de l’explosion d’objets ancestraux. Il est donc possible d’introduire des modèles de processus ponctuels admettant des propriétés d’attractivité ou de répulsion, ou encore dont l’intensité est elle-même aléatoire. Certains d’entre-eux peuvent être assez simplement obtenus et simulés à partir de processus ponctuels de Poisson (marqués). Nous en décrivons deux ci-dessous.

Le premier modèle est répulsif et connu sous le nom de *processus de sphères dures de Matérn (de type 2)*. On se donne la réalisation  $\xi$  d’un processus ponctuel de Poisson (PPP) d’intensité  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}^d$  muni de marques i.i.d. uniformes dans  $[0, 1]$  et un réel  $r > 0$ . Les marques étant vues comme les dates de potentielles naissances des points et  $r$  comme la distance minimale entre deux points, on retient un point  $x \in \xi$  si, et seulement si, la boule centrée en  $x$  et de rayon  $r$  ne contient pas d’autre point de  $\xi$  ayant une marque inférieure.

Le second modèle est attractif et connu sous le nom de *processus d’amas de Matérn*. On se donne la réalisation  $\xi$  d’un processus ponctuel de Poisson (PPP) dans  $\mathbf{R}^d$  muni de marques i.i.d.  $m(x)$ ,  $x \in \xi$  de loi de Poisson de paramètre  $\mu$  et un réel  $r > 0$ . Les points de  $\xi$  étant vus comme les parents et leurs marques leurs nombre d’enfants respectifs, on tire pour chaque  $x \in \xi$  uniformément et indépendamment  $m(x)$  points dans la boule centrée en  $x$  et de rayon

$r$ . On ne conserve finalement que les enfants.

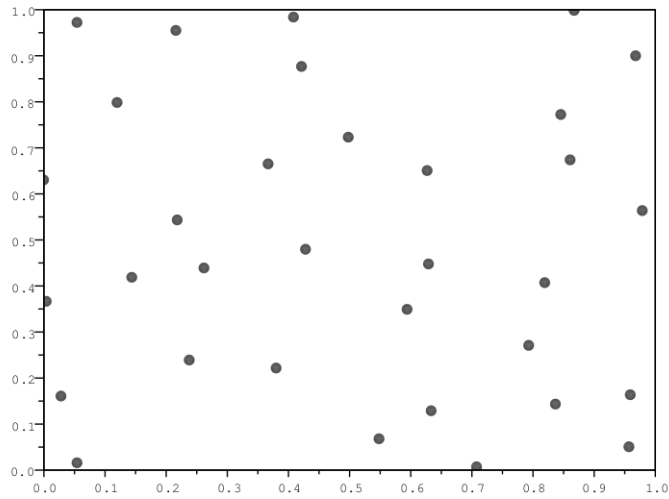


FIGURE 5 – Une réalisation d'un processus ponctuel de sphères dures de Matérn.

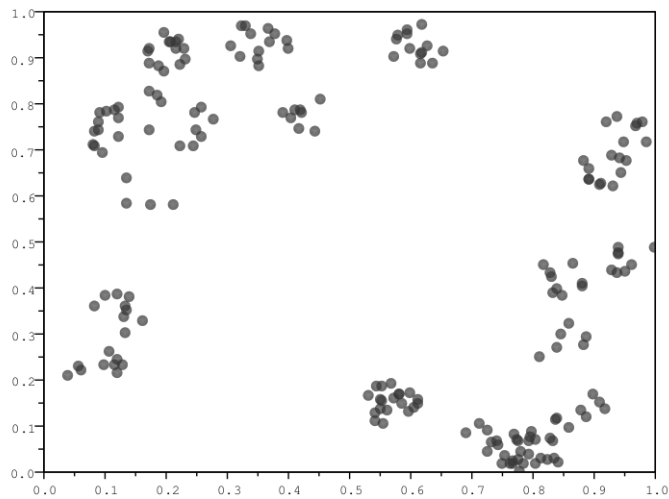


FIGURE 6 – Une réalisation d'un processus ponctuel d'amas de Matérn.

On peut également penser aux *processus de Cox* (ou *processus de Poisson doublement stochastiques*) qui peuvent être décrits comme des processus de Poisson (inhomogènes) dont la mesure d'intensité est elle-même aléatoire - le processus d'amas de Matérn rentre dans

ce cadre plus général - ou encore aux *processus déterminantaux* (répulsifs) et *permanantaux* (attractifs).

#### **3.6 Liens avec la théorie des valeurs extrêmes**

Le lecteur désireux de plus de détails sur cette théorie pourra consulter [7], en particulier les Chapitres 1, 2 et 5.



## Références

- [1] BARBE, P. ET LEDOUX, M., *Probabilité*, EDP Sciences (2007).
- [2] CHABANOL, M.-L. ET RUCH, J.-J., *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de Mathématiques*, Ellipse (2016).
- [3] CHENAVER, N., COUPIER, D. ET ROUSSELLE, A., *The bi-dimensional Directed IDLA forest*, *Annals of Applied Probability*, Vol. 33, No. 3, p. 2247-2290 (2023)
- [4] CHIU, S.N., STOYAN, D., KENDALL, W. S. ET MECKE, J., *Stochastic Geometry and its applications*, Third Edition, Wiley (2013).
- [5] COTTRELL, M. ET *al.*, *Exercices de probabilités : licence, maîtrise, écoles d'ingénieurs*, Cassini (1998).
- [6] DELMAS, J.-F., *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*, Les presses de l'ENSTA (2010).
- [7] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. ET MIKOSCH, T., *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer (1997).
- [8] FERRARI, P.A., GRISI, R. ET GROISMAN, P., *Harmonic deformation of Delaunay triangulations*, *Stoch. Proc. Appl.* Vol 122 (5), p. 2185-2210 (2012).
- [9] GARET, O. ET KURTZMANN, A., *De l'intégration aux probabilités*, Ellipse (2011).
- [10] MIKOSCH, T., *Non-Life Insurance Mathematics - An introduction with the Poisson Process*, Seconde édition, Springer (2009).
- [11] OUVRARD, J.-Y., *Probabilité (2 Tomes)*, Cassini (1998).
- [12] PRUSCHA, H., *Statistical Analysis of Climate Series*, Springer (2013).