# Chapitre 2: Statistiques descriptives univariées

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2024-2025
Semestre 1

## Contexte et objectifs

- Développer un panel de méthodes permettant de représenter et synthétiser des données collectées

# Contexte et objectifs

- Développer un panel de méthodes permettant de représenter et synthétiser des données collectées

- Les données sont obtenues soit sur une population entière soit sur un échantillon choisi au hasard dans cette population

# Contexte et objectifs

- Développer un panel de méthodes permettant de représenter et synthétiser des données collectées

- Les données sont obtenues soit sur une population entière soit sur un échantillon choisi au hasard dans cette population

- On souhaite fournir
  - une visualisation (représentation graphique) d'un phénomène aléatoire
  - une description simple du phénomène à l'aide d'un nombre limité de valeurs (paramètres statistiques)

# Contexte et objectifs

- Développer un panel de méthodes permettant de représenter et synthétiser des données collectées
- Les données sont obtenues soit sur une population entière soit sur un échantillon choisi au hasard dans cette population
- On souhaite fournir
  - une visualisation (représentation graphique) d'un phénomène aléatoire
  - une description simple du phénomène à l'aide d'un nombre limité de valeurs (paramètres statistiques)
- statistiques descriptives $\neq$ statistiques inférentielles

# Vocabulaire statistique

## Définition

*On appelle :*

1. *population tout ensemble étudié par la statistique ;*
2. *individu tout élément de la population ;*
3. *effectif total le nombre d'individus dans la population.*

## Notations

*On note $\mathcal{P}$ la population et $N$ l'effectif total de cette population.*

# Vocabulaire statistique

## Définition

*On appelle :*

1. *population tout ensemble étudié par la statistique ;*
2. *individu tout élément de la population ;*
3. *effectif total le nombre d'individus dans la population.*

## Notations

*On note $\mathcal{P}$ la population et $N$ l'effectif total de cette population.*

## Exemple

1. *Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des étudiants de la promotion, un individu est un étudiant de la promotion.*
2. *Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des jours du mois de septembre 2016, chaque jour de ce mois est un individu et l'effectif total est $N = 30$.*

# Vocabulaire statistique

### Définition

*Soit $\mathcal{P}$ une population.*
*On appelle variable statistique (ou caractère) une quantité ou qualité définie sur $\mathcal{P}$ susceptible de varier d'un individu à l'autre. On appelle modalités les différentes valeurs ou aspects pris par cette variable.*

# Vocabulaire statistique

## Définition

*Soit $\mathcal{P}$ une population.*
*On appelle* variable statistique *(ou* caractère*) une quantité ou qualité définie sur $\mathcal{P}$ susceptible de varier d'un individu à l'autre. On appelle* modalités *les différentes valeurs ou aspects pris par cette variable.*
*On distingue :*

1. *les variables* qualitatives *pour lesquelles les modalités ne sont pas objectivement comparables ;*
2. *les variables* quantitatives *(ou* ordinales*) dont les modalités sont mesurables et comparables deux à deux.*

# Vocabulaire statistique

### Définition

*Soit $\mathcal{P}$ une population.*
*On appelle variable statistique (ou caractère) une quantité ou qualité définie sur $\mathcal{P}$ susceptible de varier d'un individu à l'autre. On appelle modalités les différentes valeurs ou aspects pris par cette variable.*
*On distingue :*

1. *les variables qualitatives pour lesquelles les modalités ne sont pas objectivement comparables ;*
2. *les variables quantitatives (ou ordinales) dont les modalités sont mesurables et comparables deux à deux.*

*Parmi les variables quantitatives, on distingue :*

1. *les variables quantitatives discrètes dont les valeurs possibles sont isolées ;*
2. *les variables quantitatives continues pouvant prendre toutes les valeurs contenues dans un intervalle.*

# Vocabulaire statistique

**Notation**

*Les variables statistiques sont désignées par des lettres majuscules, généralement* $X$ *ou* $Y$.

# Vocabulaire statistique

### Notation

*Les variables statistiques sont désignées par des lettres majuscules, généralement* $X$ *ou* $Y$.

### Exemple

1. *Si la population* $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des étudiants de la promotion, une variable statistique peut être la couleur des yeux (variable qualitative) ou son âge (variable quantitative discrète).*
2. *Si la population* $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des jours de septembre 2016, une variable statistique peut être la hauteur totale des précipitations journalières relevées à Dijon (variable quantitative continue).*

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Données

- $X$ : variable statistique quantitative discrète sur une population $\mathcal{P}$
- $N$ : effectif total
- $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ : les modalités
- $n_1, n_2, \ldots, n_r$ : les effectifs associés à ces modalités

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Données

- $X$ : variable statistique quantitative discrète sur une population $\mathcal{P}$
- $N$ : effectif total
- $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ : les modalités
- $n_1, n_2, \ldots, n_r$ : les effectifs associés à ces modalités

## Pour obtenir le tableau statistique complet, on ajoute

- $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ : la fréquence de la modalité $x_i$
- $N_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} n_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$ : l' Effectif Cumulé Croissant (ECC) jusqu'à la modalité $x_i$
- $F_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} f_k = \dfrac{N_i}{N}$ : la Fréquence Cumulée Croissante (FCC)

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Exemple

*Une enquête réalisée auprès d'une population de 100 femmes de 40 ans a recensé le nombre d'enfant(s) de chacune.*

| *Modalités* $x_i$ | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Effectifs* $n_i$ | *9* | *28* | *32* | *24* | *4* | *2* | *1* |

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Exemple

*Une enquête réalisée auprès d'une population de 100 femmes de 40 ans a recensé le nombre d'enfant(s) de chacune.*

| *Modalités $x_i$* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Effectifs $n_i$* | *9* | *28* | *32* | *24* | *4* | *2* | *1* |

- *Population :* *le contingent de femmes interrogées*
- *Effectif total :* $N = 100$
- *Variable statistique étudiée $X$ :* *le nombre d'enfant(s) par femme*
- *Nature :* *quantitative discrète*

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Exemple

*Une enquête réalisée auprès d'une population de 100 femmes de 40 ans a recensé le nombre d'enfant(s) de chacune.*

| Modalités $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs $n_i$ | 9 | 28 | 32 | 24 | 4 | 2 | 1 |
| Fréquences $f_i = \frac{n_i}{N}$ | 0,09 | 0,28 | 0,32 | 0,24 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |
| ECC $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$ | 9 | 37 | 69 | 93 | 97 | 99 | 100 |
| FCC $F_i = \frac{N_i}{N}$ | 0,09 | 0,37 | 0,69 | 0,93 | 0,97 | 0,99 | 1 |

- *Population : le contingent de femmes interrogées*
- *Effectif total :* $N = 100$
- *Variable statistique étudiée X : le nombre d'enfant(s) par femme*
- *Nature : quantitative discrète*

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

**Représentation graphique 1 : Histogramme des fréquences**

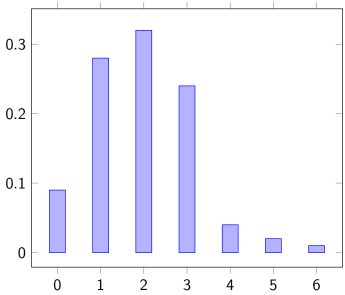
Diagramme en bâtons : la hauteur du bâton associé à $x_i$ = fréquence $f_i$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Représentation graphique 1 : Histogramme des fréquences

Diagramme en bâtons : la hauteur du bâton associé à $x_i$ = fréquence $f_i$

## Exemple (suite)




*On observe dans ce cas une traine (ou queue de distribution) étalée vers la droite.*

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

**Notation**

$\mathbf{P}[X < t]$ : *la fréquence totale des modalités* $x_i$ *telles que* $x_i < t$
*autrement dit, la proportion de données* $< t$
$\mathbf{P}[X \leq t]$ : *la proportion de données* $\leq t$
$\mathbf{P}[X > t]$ : *la proportion de données* $> t$
$\mathbf{P}[X \geq t]$ : *la proportion de données* $\geq t$
$\mathbf{P}[t_1 < X < t_2]$ : *la proportion de données strictement comprises entre* $t_1$ *et* $t_2$
...

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Notation

$\mathbf{P}[X < t]$ : *la fréquence totale des modalités* $x_i$ *telles que* $x_i < t$
*autrement dit, la proportion de données* $< t$
$\mathbf{P}[X \leq t]$ : *la proportion de données* $\leq t$
$\mathbf{P}[X > t]$ : *la proportion de données* $> t$
$\mathbf{P}[X \geq t]$ : *la proportion de données* $\geq t$
$\mathbf{P}[t_1 < X < t_2]$ : *la proportion de données strictement comprises entre* $t_1$ *et* $t_2$
...

## Fonction de répartition - Représetation graphique 2

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R} &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto F(t) = \mathbf{P}[X \leq t] \end{aligned}$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Proposition

*Soit $X$ une variable statistique discrète dont les modalités sont $x_1, \dots, x_r$.*

1. *La fonction de répartition $F$ de $X$ est croissante, en escalier telle que*

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_1 \\ F_i & \text{si } x_i \le t < x_{i+1},\ i = 1, \dots, r-1 \\ 1 & \text{si } t \ge x_r \end{cases}.$$

2. *On a :*

$$\mathbf{P}[X > t] = 1 - \mathbf{P}[X \le t] = 1 - F(t),$$

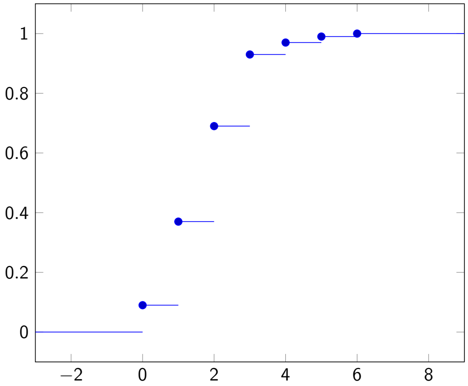
$$\mathbf{P}[t_1 < X \le t_2] = \mathbf{P}[X \le t_2] - \mathbf{P}[X \le t_1] = F(t_2) - F(t_1),$$

$$\mathbf{P}[X = x_i] = f_i \quad \text{et} \quad \mathbf{P}[X = t] = 0 \text{ si } t \notin \{x_1, \dots, x_r\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X < t] &= \mathbf{P}[X \le t] - \mathbf{P}[X = t] \\ &= \begin{cases} F(x_i) - f(x_i) = F(x_{i-1}) & \text{si } t = x_i \\ F(t) & \text{si } t \notin \{x_1, \dots, x_r\} \end{cases}. \end{aligned}$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Exemple (suite)



# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de position

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i.$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de position

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i.$$

Mode : toute modalité $x_i$ dont l'effectif est maximal parmi tous les effectifs.

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de position

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i.$$

Mode : toute modalité $x_i$ dont l'effectif est maximal parmi tous les effectifs.
Médiane : toute valeur $me$ telle que

$$\mathbf{P}[X \leq me] \geq 0,5 \quad \textbf{et} \quad \mathbf{P}[X \geq me] \geq 0,5.$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de position

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i.$$

Mode : toute modalité $x_i$ dont l'effectif est maximal parmi tous les effectifs.
Médiane : toute valeur *me* telle que

$$\mathbf{P}\left[X \leq me\right] \geq 0,5 \quad \textbf{et} \quad \mathbf{P}\left[X \geq me\right] \geq 0,5.$$

Quantile d'ordre $p \in ]0,1[$ : toute valeur $q_p$ telle que :

$$\mathbf{P}\left[X \leq q_p\right] \geq p \quad \textbf{et} \quad \mathbf{P}\left[X \geq q_p\right] \geq 1 - p.$$

Quantiles d'ordre 0,25 et 0,75 : 1$^{\text{er}}$ et 3$^{\text{e}}$ quartiles
Quantiles d'ordre 0,1 et 0,9 : 1$^{\text{er}}$ et 9$^{\text{e}}$ déciles

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Moyenne :*

$$\overline{X} = \frac{9 \times 0 + 28 \times 1 + 32 \times 2 + 24 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6}{100} = 1,96.$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Moyenne :*

$$\overline{X} = \frac{9 \times 0 + 28 \times 1 + 32 \times 2 + 24 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6}{100} = 1,96.$$

*Mode :* *2 (l'effectif correspondant est 32 est maximal)*

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Moyenne :*

$$\overline{X} = \frac{9 \times 0 + 28 \times 1 + 32 \times 2 + 24 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6}{100} = 1,96.$$

*Mode : 2 (l'effectif correspondant est 32 est maximal)*

*Médiane :* $me = 2$
*En effet,* $\mathbf{P}[X \leq 2] = F(2) = 0,69 \geq 0,5$ *et*
$\mathbf{P}[X \geq 2] = 1 - F(1) = 1 - 0,37 = 0,63 \geq 0,5$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Moyenne :*

$$\overline{X} = \frac{9 \times 0 + 28 \times 1 + 32 \times 2 + 24 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6}{100} = 1,96.$$

*Mode :* *2 (l'effectif correspondant est 32 est maximal)*

*Médiane :* $me = 2$
*En effet,* $\mathbf{P}[X \leq 2] = F(2) = 0,69 \geq 0,5$ *et*
$\mathbf{P}[X \geq 2] = 1 - F(1) = 1 - 0,37 = 0,63 \geq 0,5$

*Quartiles :* $q_{0,25} = 1$ *et* $q_{0,75} = 3$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{X}^2$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

## Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$
Écart-type relatif ou coefficient de variation : $\mathrm{c_v} = \dfrac{\sigma}{\overline{X}} \qquad \text{si } \overline{X} \neq 0$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Paramètres de dispersion

Étendue : $x_r - x_1$ où $x_1$ est la plus petite modalité et $x_r$ la plus grande modalité
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$
Écart-type relatif ou coefficient de variation : $\mathrm{c_v} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \qquad \text{si } \overline{X} \neq 0$

Écart absolu moyen :

$$\mathrm{EAM} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i |x_i - \overline{X}|$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$
*Étendue inter-quartiles :* $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$
*Étendue inter-quartiles :* $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$
*Variance :*

$$\mathbf{V}[X] = \frac{9 \times (0 - 1,96)^2 + \cdots + 1 \times (6 - 1,96)^2}{100} \simeq 1,3784.$$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$
*Étendue inter-quartiles :* $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$
*Variance :*

$$\mathbf{V}[X] = \frac{9 \times (0 - 1,96)^2 + \cdots + 1 \times (6 - 1,96)^2}{100} \simeq 1,3784.$$

*Écart-type :* $\sigma = \sqrt{1,3784} \simeq 1,1741$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$
*Étendue inter-quartiles :* $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$
*Variance :*

$$\mathbf{V}[X] = \frac{9 \times (0 - 1,96)^2 + \cdots + 1 \times (6 - 1,96)^2}{100} \simeq 1,3784.$$

*Écart-type :* $\sigma = \sqrt{1,3784} \simeq 1,1741$
*Coefficient de variation :* $\mathrm{c_v} = \dfrac{\sqrt{1,3784}}{1,96} \simeq 0,5990$

# Cas quantitatif discret sans regroupement en classe

Exemple (suite)

*Étendue :* $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$
*Étendue inter-quartiles :* $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$
*Variance :*

$$\mathbf{V}[X] = \frac{9 \times (0 - 1,96)^2 + \cdots + 1 \times (6 - 1,96)^2}{100} \simeq 1,3784.$$

*Écart-type :* $\sigma = \sqrt{1,3784} \simeq 1,1741$
*Coefficient de variation :* $\mathrm{c_v} = \dfrac{\sqrt{1,3784}}{1,96} \simeq 0,5990$
*Écart absolu moyen :*

$$\mathrm{EAM} = \frac{9 \times |0 - 1,96| + \cdots + 1 \times |6 - 1,96|}{100} = 0,8904$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Changements

- On n'a pas des modalités isolées $x_i$ mais des classes $]b_{i-1}, b_i]$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Changements

- On n'a pas des modalités isolées $x_i$ mais des classes $]b_{i-1}, b_i]$
- Les classes peuvent être d'amplitudes différentes
  - plus de travail pour le prendre en compte

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Changements

- On n'a pas des modalités isolées $x_i$ mais des classes $]b_{i-1}, b_i]$
- Les classes peuvent être d'amplitudes différentes
  - plus de travail pour le prendre en compte
- La fonction de répartition est continue (interpolation linéaire) et $\mathbf{P}[X = t] = 0$ pour tout $t$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Changements

- On n'a pas des modalités isolées $x_i$ mais des classes $]b_{i-1}, b_i]$
- Les classes peuvent être d'amplitudes différentes
  - plus de travail pour le prendre en compte
- La fonction de répartition est continue (interpolation linéaire) et $\mathbf{P}[X = t] = 0$ pour tout $t$
- En supposant les données réparties uniformément dans chaque classe, on choisira comme représentant d'une classe son centre pour le calcul de certains paramètres

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

À partir des données, pour obtenir le tableau statistique complet, on ajoute

- $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ : la fréquence de la modalité $x_i$
- $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$ l'ECC (jusqu'à la fin de la classe $C_i$, *i.e.* en $b_i$)
- $F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k = \dfrac{N_i}{N}$ : la FCC

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

À partir des données, pour obtenir le tableau statistique complet, on ajoute

- $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ : la fréquence de la modalité $x_i$
- $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$ l'ECC (jusqu'à la fin de la classe $C_i$, *i.e.* en $b_i$)
- $F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k = \dfrac{N_i}{N}$ : la FCC
- $a_i = b_i - b_{i-1}$ : l'amplitude de la classe $C_i = ]b_{i-1}, b_i]$
- $a_i^r = \dfrac{a_i}{A}$ : l'amplitude relative de la classe $C_i$, $A$ à choisir
- $n_i^r = \dfrac{n_i}{a_i^r}$ : l'effectif relatif de la classe $C_i$
- $f_i^r = \dfrac{f_i}{a_i^r} = \dfrac{n_i^r}{N}$ : la fréquence relative de la classe $C_i$
- $c_i = \dfrac{b_i + b_{i-1}}{2}$ : le centre de la classe $C_i$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Exemple

*Durant le mois de janvier 2016, on a relevé les précipitations journalières (exprimées en mm) sur Dijon.*

| *Hauteur des précipitations (en mm)* | $[0;1[$ | $[1;3[$ | $[3;6[$ | $[6;9[$ | $[9;14[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Nombre de jours* | *17* | *5* | *5* | *2* | *2* |

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Exemple

*Durant le mois de janvier 2016, on a relevé les précipitations journalières (exprimées en mm) sur Dijon.*

| *Hauteur des précipitations (en mm)* | $[0;1[$ | $[1;3[$ | $[3;6[$ | $[6;9[$ | $[9;14[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Nombre de jours* | *17* | *5* | *5* | *2* | *2* |

*Population :* *l'ensemble des jours sur le mois de janvier 2016*
*Variable statistique étudiée X :* *hauteur des précipitations relevées à Dijon /jour*
*Nature :* *quantitative continue*
*Choix de l'amplitude unitaire :* $A = 1$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

Exemple

*Durant le mois de janvier 2016, on a relevé les précipitations journalières (exprimées en mm) sur Dijon.*

| $i$ | $C_i$ | $c_i$ | $a_i = a_i^r$ | $n_i$ | $f_i$ | $n_i^r$ | $f_i^r$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $[0;1[$ | 0,5 | 1 | 17 | 0,55 | 17 | 0,55 | 17 | 0,55 |
| 2 | $[1;3[$ | 2 | 2 | 5 | 0,16 | 2,5 | 0,08 | 22 | 0,71 |
| 3 | $[3;6[$ | 4,5 | 3 | 5 | 0,16 | 1,67 | 0,05 | 27 | 0,87 |
| 4 | $[6;9[$ | 7,5 | 3 | 2 | 0,06 | 0,67 | 0,02 | 29 | 0,94 |
| 5 | $[9;14[$ | 11,5 | 5 | 2 | 0,06 | 0,4 | 0,01 | 31 | 1 |

*Population : l'ensemble des jours sur le mois de janvier 2016*
*Variable statistique étudiée $X$ : hauteur des précipitations relevées à Dijon /jour*
*Nature : quantitative continue*
*Choix de l'amplitude unitaire :* $A = 1$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Représentation graphique 1 - Histogramme des fréquences (relatives)

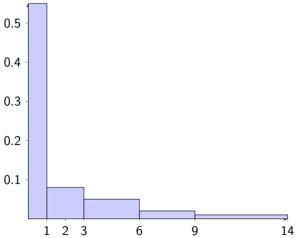
Diagramme en rectangles tel que l'**aire** du rectangle associé à une classe représente sa fréquence.
Le rectangle associé à une classe a pour largeur son amplitude et pour **hauteur** sa fréquence **relative**.

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Représentation graphique 1 - Histogramme des fréquences (relatives)

Diagramme en rectangles tel que l'**aire** du rectangle associé à une classe représente sa fréquence.
Le rectangle associé à une classe a pour largeur son amplitude et pour **hauteur** sa fréquence **relative**.

## Exemple (suite)




*Sur l'histogramme des fréquences (relatives), on observe une traine (ou queue de distribution) étalée vers la droite*

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

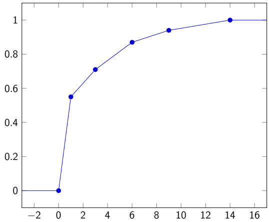
## Représentation graphique 2 - Fonction de répartition

Polygone des fréquences cumulées : ligne polygonale dont l'ordonnée est nulle pour $x \leq b_0$, vaut 1 pour $x \geq b_r$, et interpolant linéairement les points

$$(b_0, 0), (b_1, F_1), \ldots, (b_{r-1}, F_{r-1}), (b_r, F_r = 1)$$

$\rightsquigarrow$ Approximation de la fonction de répartition en supposant une répartition uniforme des données au sein de chaque classe

## Exemple (suite)



# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Proposition

*Soit $X$ une variable aléatoire continue.*

1. *La fonction de répartition de $X$ est croissante et* **continue**. *En particulier, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$ :*

$$\mathbf{P}[X < x] = \mathbf{P}[X \leq x] = F(x) \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}[X = x] = 0.$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Proposition

*Soit $X$ une variable aléatoire continue.*

1. *La fonction de répartition de $X$ est croissante et* **continue***. En particulier, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$ :*

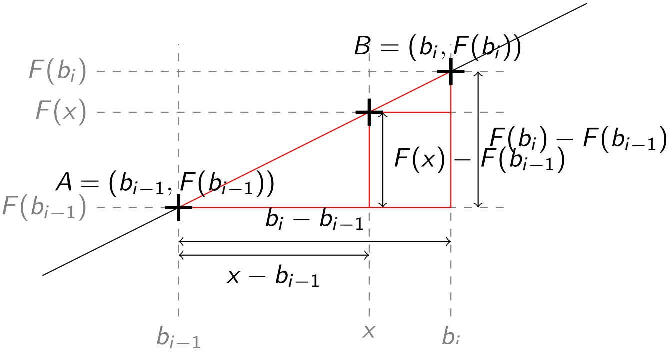
$$\mathbf{P}[X < x] = \mathbf{P}[X \leq x] = F(x) \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}[X = x] = 0.$$

2. *Pour tout $x$ dans la classe $C_i = [b_{i-1}, b_i[$, on a :*

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \left(F(b_i) - F(b_{i-1})\right) + F(b_{i-1}) \\ &= \frac{f_i^r}{A}(x - b_{i-1}) + F(b_{i-1}), \end{aligned}$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## La méthode d'interpolation linéaire



# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Exemple (suite)

*Déterminons* $F(2) = \mathbf{P}[X \leq 2]$ *par interpolation linéaire dans l'Exemple précédent.*
*Meilleur encadrement de 2 par des bornes de classes :* $1 < 2 < 3$
*La méthode d'interpolation linéaire donne :*

$$\frac{F(2) - F(1)}{F(3) - F(1)} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

*donc*

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{2}(F(3) - F(1))$$

*donc*

$$F(2) = \frac{1}{2}(F(3) - F(1)) + F(1) = \frac{1}{2}(0,71 - 0,55) + 0,55 = 0,63.$$

*Ainsi,* $\mathbf{P}[X \leq 2] = F(2) = 0,63$ *et on a relevé au plus* 2*mm de précipitations durant 63% des jours.*

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

Paramètres de position - ce qui change peu

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i .$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Paramètres de position - ce qui change peu

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i .$$

### Paramètres de position - ce qui change plus

Classe modale : toute classe $C_i$ dont l'effectif relatif est maximal parmi tous les effectifs relatifs.

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Paramètres de position - ce qui change peu

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i.$$

### Paramètres de position - ce qui change plus

Classe modale : toute classe $C_i$ dont l'effectif relatif est maximal parmi tous les effectifs relatifs.

Médiane : l'unique valeur $me$ telle que $\mathbf{P}[X \leq me] = 0,5$
$\rightsquigarrow$ interpolation linéaire

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

**Paramètres de position - ce qui change peu**

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i .$$

**Paramètres de position - ce qui change plus**

Classe modale : toute classe $C_i$ dont l'effectif relatif est maximal parmi tous les effectifs relatifs.

Médiane : l'unique valeur $me$ telle que $\mathbf{P}[X \leq me] = 0,5$
$\rightsquigarrow$ interpolation linéaire

Quantile d'ordre $p \in ]0,1[$ : l'unique valeur $q_p$ telle que :

$$\mathbf{P}[X \leq q_p] = p$$

## Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

### Exemple (suite)

*Classe modale :* $C_1 = [0;1[$ *(effectif relatif le plus élevé)*
*Moyenne (arithmétique) :*

$$\overline{X} = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_5 c_5}{N} \simeq 2,5483871;$$

*Médianne :* $me = \dfrac{10}{11}$
*En effet, il faut trouver la valeur me telle que* $F(me) = \mathbf{P}[X \leq me] = 0,5$.
*On a* $F(0) = 0$ *et* $F(1) = 0,55$ *et cette valeur est dans la classe* $C_1 = [0;1[$.
*On détermine me par interpolation linéaire :*

$$\frac{me - 0}{1 - 0} = \frac{F(me) - F(0)}{F(1) - F(0)}$$

*soit*

$$me = \frac{0,5}{0,55} = \frac{10}{11} \simeq 0,9090$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la 1re classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la 1re classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la 1re classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i(c_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i {c_i}^2 - \overline{X}^2$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la 1re classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i (c_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i {c_i}^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la $1^{\text{re}}$ classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe

Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.

Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i (c_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i {c_i}^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$

Écart-type relatif ou coefficient de variation : $\mathrm{c_v} = \dfrac{\sigma}{\overline{X}} \qquad \text{si } \overline{X} \neq 0$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

## Paramètres de dispersion - peu de changements

Étendue : $b_r - b_0$ où $b_0$ est la borne inférieure de la 1re classe et $b_r$ la borne suprérieure de la dernière classe
Étendue inter-quartiles : $q_{0,75} - q_{0,25}$ où $q_{0,25}$ et $q_{0,75}$ sont les premier et troisième quartiles.
Variance :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i (c_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i {c_i}^2 - \overline{X}^2$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}$
Écart-type relatif ou coefficient de variation : $\mathrm{c_v} = \dfrac{\sigma}{\overline{X}}$ si $\overline{X} \neq 0$
Écart absolu moyen :

$$\mathrm{EAM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i |c_i - \overline{X}|$$

# Cas quantitatif continu (ou discret avec regroupements en classes)

Exemple (suite)

*Étendue :* $b_5 - b_0 = 14 - 0 = 14$
*Variance :*

$$\mathrm{V}[X] = \frac{n_1(c_1 - \overline{X})^2 + \cdots + n_5(c_5 - \overline{X})^2}{N} = \frac{n_1 c_1^2 + \cdots + n_5 c_5^2}{N} - \overline{X}^2 \simeq 9,71540;$$

*Écart-type :*

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]} \simeq 3,11695;$$

*Coefficient de variation :*

$$\mathrm{c_v} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \simeq 1,22310;$$

*Écart-absolu moyen :*

$$\mathrm{EAM} = \frac{n_1|c_1 - \overline{X}| + \cdots + n_5|c_5 - \overline{X}|}{N} \simeq 2,42352.$$